Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta luglio 2022

Cognome: (in `STAMPATELLO`)	
Nome: (in `STAMPATELLO`)	
Matricola:	
Titolare del corso:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+ax}-\cos\sqrt{ax}-ax}{\frac{\pi}{2}+e^{-\frac{x}{b}}-\cosh(cx)-\arctan\frac{b}{x}}.$$

$[(a,b,c)=(3,2,1),(2,3,1),(2,1,3),(3,1,2)]$

Soluzione. Dagli sviluppi

$$\sqrt{1+t}=1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+o(t^2), \qquad \cos t=1-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{24}t^4+o(t^5) \quad \text{per } t\to 0,$$

si ottiene, per $x\to 0^+$,

$$\sqrt{1+ax}-\cos\sqrt{ax}-ax=1+\frac{1}{2}ax-\frac{1}{8}a^2x^2-1+\frac{1}{2}ax-\frac{1}{24}a^2x^2-ax+o(x^2)=-\frac{1}{6}a^2x^2+o(x^2).$$

Si ha poi, sempre per $t\to 0^+$,

$$\arctan\frac{1}{t}=\frac{\pi}{2}-\arctan t=\frac{\pi}{2}-t+o(t^2), \qquad \cosh t=1+\frac{t^2}{2}+o(t^3), \qquad e^t=1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2),$$

e pertanto

$$\frac{\pi}{2}+e^{-\frac{x}{b}}-\cosh(cx)-\arctan\frac{b}{x}=\frac{\pi}{2}+1-\frac{x}{b}+\frac{x^2}{2b^2}-1-\frac{c^2x^2}{2}-\frac{\pi}{2}+\frac{x}{b}+o(x^2)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b^2}-c^2\right)x^2+o(x^2).$$

Il limite richiesto è dunque

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{6}a^2x^2+o(x^2)}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b^2}-c^2\right)x^2+o(x^2)}=\frac{a^2b^2}{3\,(b^2c^2-1)}=\begin{cases}4, & (a,b,c)=(3,2,1),\\ \frac{3}{2}, & (a,b,c)=(2,3,1),\\ \frac{1}{6}, & (a,b,c)=(2,1,3),\\ 1, & (a,b,c)=(3,1,2).\end{cases}$$

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = a\log(1 + |x-b|e^{x-b})$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$[(a,b) = (4,1),(3,2),(2,-1),(2,-2)]$

Soluzione. Poiché chiaramente $1 + |x-b|e^{x-b} \geq 1 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, il dominio della funzione data è $\mathbb{R}$ e $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, con $f(x) = 0$ se e solo se $x = b$. In particolare f non ha asintoti verticali. Essendo poi

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} a\log(1-(x-b)e^{x-b}) = 0,$$

l'asse x è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$ per f. Inoltre $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, e quindi f non ammette un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$, ed essendo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} a\frac{\log(1+(x-b)e^{x-b})}{x} = \lim_{x\to+\infty} a\frac{x-b+\log(x-b+e^{-(x-b)})}{x} = a,$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to+\infty} a\left(-b+\log(x-b+e^{-(x-b)})\right) = +\infty,$$

f non ha nemmeno un asintoto obliquo per $x \to +\infty$. Si ha poi

$$\frac{d}{dx}a\log(1 \pm (x-b)e^{x-b}) = \pm a\frac{e^{x-b}(1+x-b)}{1 \pm (x-b)e^{x-b}},$$

e dunque

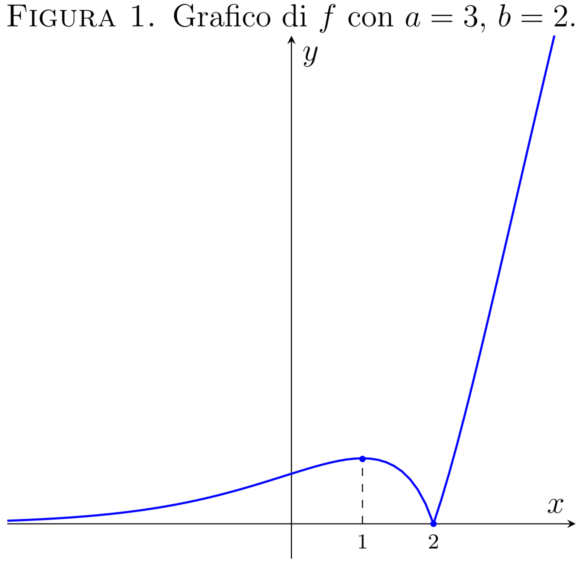
$$f'(x) = \begin{cases} -a\frac{e^{x-b}(1+x-b)}{1-(x-b)e^{x-b}}, & x < b, \\ a\frac{e^{x-b}(1+x-b)}{1+(x-b)e^{x-b}}, & x > b, \end{cases}$$

e poiché dalla continuità di f in un intorno di $x = b$ e dal teorema di Lagrange segue

$$\lim_{h\to0^\pm} \frac{f(b+h)-f(b)}{h} = \lim_{x\to b^\pm} f'(x) = \pm a,$$

la f non è derivabile in $x = b$, dove il grafico di f avrà un punto angoloso. Infine è chiaro che se $x < b$ si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $1+x-b < 0$, cioè $x < b-1$, mentre $f'(x) > 0$ per ogni $x > b$, poiché allora $1+x-b > 0$. Dunque f sarà crescente in $(-\infty, b-1)$ e in $(b, +\infty)$, e decrescente in $(b-1, b)$. Pertanto $x = b-1$ è un punto di massimo relativo e $x = b$ un punto di minimo relativo. Il grafico di f con $a = 3$ e $b = 2$ è mostrato in fig. 1.

FIGURA 1. Grafico di f con $a = 3$, $b = 2$.



Esercizio 3. **[7 punti]** Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(ax)}{x^{\alpha+3}}(a+\sin x)^{\alpha^2}dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 0$.

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Soluzione. Poiché $\alpha^2 \geq 0$ e $a \geq 2$, la funzione integranda è continua e positiva nell'intervallo di integrazione, e bisogna quindi soltanto studiarla per $x \to +\infty$. Si ha allora, per la crescenza di $\arctan(ax)$,

$$\frac{\arctan(a)}{x^{\alpha+3}}(a-1)^{\alpha^2} \leq \frac{\arctan(ax)}{x^{\alpha+3}}(a+\sin x)^{\alpha^2} \leq \frac{\pi}{2x^{\alpha+3}}(a+1)^{\alpha^2}, \qquad x \in [1, +\infty),$$

e poiché la funzione $\frac{1}{x^{\alpha+3}}$ è integrabile per $x \to +\infty$ se e solo se $\alpha + 3 > 1$, si conclude, dal teorema del confronto, che anche l'integrale improprio considerato è convergente se e solo se $\alpha + 3 > 1$, cioè $\alpha > -2$. Per $\alpha = 0$ si ha, integrando per parti,

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(ax)}{x^3}\,dx &= \lim_{r\to+\infty}\left[-\frac{1}{2x^2}\arctan(ax)\right]_1^r + a\int_1^r \frac{dx}{2x^2(1+a^2x^2)} \\ &= \frac{\arctan a}{2} + \lim_{r\to+\infty}\frac{a}{2}\int_1^r \frac{dx}{x^2(1+a^2x^2)}.\end{aligned}$$

Inoltre

$$\frac{1}{x^2(1+a^2x^2)} = \frac{1+a^2x^2-a^2x^2}{x^2(1+a^2x^2)} = \frac{1}{x^2} - \frac{a^2}{1+a^2x^2},$$

e pertanto

$$\begin{aligned}\lim_{r\to+\infty}\int_1^r \frac{dx}{x^2(1+a^2x^2)} &= \lim_{r\to+\infty}\int_1^r \frac{dx}{x^2} - a^2\int_1^r \frac{dx}{1+a^2x^2} \\ &= \lim_{r\to+\infty}\left[-\frac{1}{x} - a\arctan(ax)\right]_1^r = -a\frac{\pi}{2} + 1 + a\arctan a.\end{aligned}$$

In conclusione

$$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan(ax)}{x^3}\,dx = \frac{1+a^2}{2}\arctan a - \frac{\pi}{4}a^2 + \frac{a}{2} = \begin{cases} \frac{5}{2}\arctan 2 - \pi + 1, & a = 2, \\ \frac{10}{2}\arctan 3 - \frac{9}{4}\pi + \frac{3}{2}, & a = 3, \\ \frac{17}{2}\arctan 4 - 4\pi + 2, & a = 4, \\ 13\arctan 5 - \frac{25}{4}\pi + \frac{5}{2}, & a = 5. \end{cases}$$

Esercizio 4. [5 punti] Calcolare lo sviluppo di Taylor di ordine $n = 5$ e centro $x_0 = 0$ per la seguente funzione:
$$\frac{e^{\sin(x^2)}}{1+ax^2}.$$

$[a = 3, -3, 2, -2]$

Soluzione. Dagli sviluppi
$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^4), \qquad e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad \text{per } t \to 0,$$
segue, per $x \to 0$,
$$e^{\sin(x^2)} = e^{x^2+o(x^5)} = 1 + x^2 + \frac{1}{2}(x^2 + o(x^5))^2 + o(x^5) = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^5).$$
Inoltre dallo sviluppo
$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + o(t^3) \quad \text{per } t \to 0,$$
si ottiene
$$\frac{1}{1+ax^2} = 1 - ax^2 + a^2x^4 + o(x^5) \quad \text{per } x \to 0,$$
e pertanto
$$\begin{aligned}\frac{e^{\sin(x^2)}}{1+ax^2} &= \left(1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^5)\right)\left(1 - ax^2 + a^2x^4 + o(x^5)\right) \\ &= 1 + (1-a)x^2 + \left(\frac{1}{2} + a^2 - a\right)x^4 + o(x^5) = \begin{cases} 1 - 2x^2 + \frac{13}{2}x^4 + o(x^5), & a = 3, \\ 1 + 4x^2 + \frac{25}{2}x^4 + o(x^5), & a = -3, \\ 1 - x^2 + \frac{5}{2}x^4 + o(x^5), & a = 2, \\ 1 + 3x^2 + \frac{13}{2}x^4 + o(x^5), & a = -2. \end{cases}\end{aligned}$$

Esercizio 5 [5 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + ay' = e^{-ax} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} .$$

$[a = 2, -2, 3, -3]$

Soluzione. Introducendo la nuova funzione incognita $z := y'$ l'equazione diventa

$$z' + az = e^{-ax},$$

che è un'equazione del primo ordine lineare a coefficienti costanti non omogenea, la cui soluzione è

$$z(x) = e^{-ax} \int e^{ax} e^{-ax} dx = e^{-ax}(x + c), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Imponendo poi la condizione iniziale $z(0) = y'(0) = 0$ si ottiene $c = 0$. Pertanto, integrando per parti,

$$y(x) = \int z(x)dx = \int e^{-ax} x\, dx = -\frac{1}{a} e^{-ax} x + \frac{1}{a} \int e^{-ax} dx = -\frac{e^{-ax}}{a} \left(x + \frac{1}{a} \right) + c',$$

e imponendo la condizione iniziale $0 = y(0) = -\frac{1}{a^2} + c'$ si ricava $c' = \frac{1}{a^2}$, e quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = -\frac{1}{a} e^{-ax} x + \frac{1}{a^2}(1 - e^{-ax}), \qquad x \in \mathbb{R}.$$