

Cognome (in STAMPATELLO): Nome (in STAMPATELLO):.....

Esercizio 1. [5 punti] Calcolare lo sviluppo di McLaurin dell’ordine $n = 4$ per la seguente funzione:

$$\sqrt{\cos x + x \sin x}.$$

Svolgimento: Utilizziamo i seguenti sviluppi di Taylor per $y \rightarrow 0$:

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + o(y^2), \quad \cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + o(y^5), \quad \sin y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^4),$$

da cui

$$\cos x + x \sin x = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^5).$$

Poiché $\cos x + x \sin x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$ per $x \rightarrow 0$, si ha

$$\begin{aligned} \sqrt{\cos x + x \sin x} &= \sqrt{1 + (\cos x + x \sin x - 1)} \\ &= 1 + \frac{1}{2}(\cos x + x \sin x - 1) - \frac{1}{8}(\cos x + x \sin x - 1)^2 + o(x^4) \\ &= 1 + \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{16} + o(x^5) - \frac{1}{8}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^5)\right)^2 + o(x^4) \\ &= 1 + \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{16} - \frac{x^4}{32} + o(x^4) \\ &= 1 + \frac{x^2}{4} - \frac{3}{32}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Cognome (in STAMPATELLO): Nome (in STAMPATELLO):.....

Esercizio 2. [6 punti] Dire per quali valori del parametro α la seguente funzione è continua in $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt[4]{1+\sin(2x)}}{|x|^\alpha} \log |x| & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

Svolgimento: Ricordando gli sviluppi di Taylor

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + o(y^2), \quad \sqrt[4]{1+y} = 1 + \frac{y}{4} - \frac{3}{32}y^2 + o(y^2), \quad \sin y = y + o(y^2),$$

si ha

$$\sqrt{1+\sin x} = 1 + \frac{\sin x}{2} - \frac{(\sin x)^2}{8} + o(x^2) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

e, analogamente,

$$\sqrt[4]{1+\sin(2x)} = 1 + \frac{\sin(2x)}{4} - \frac{3}{32}(\sin(2x))^2 + o(x^2) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{3}{8}x^2 + o(x^2).$$

Pertanto

$$f(x) = \frac{\frac{x^2}{4} + o(x^2)}{|x|^\alpha} \log |x| = |x|^{2-\alpha} \left(\frac{1}{4} + o(1) \right) \log |x| \quad \text{per } x \rightarrow 0^+$$

da cui si deduce

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 2 \\ +\infty & \text{se } \alpha \geq 2. \end{cases}$$

Si conclude che f è continua in 0 (quindi in $\mathbb{R}$) se e solo se $\alpha < 2$.

Cognome (in STAMPATELLO): Nome (in STAMPATELLO):.....

Esercizio 3. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$(|x| - 1)e^{\frac{1}{\sqrt{x^2+2}|x|+2}},$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Svolgimento: Dominio: $\mathbb{R}$. f è pari.

$$f(x) \geq 0 \iff x \leq -1 \text{ e } x \geq 1, \quad f(x) = 0 \iff x = \pm 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)e^{\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} e^{\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}} = 1$$

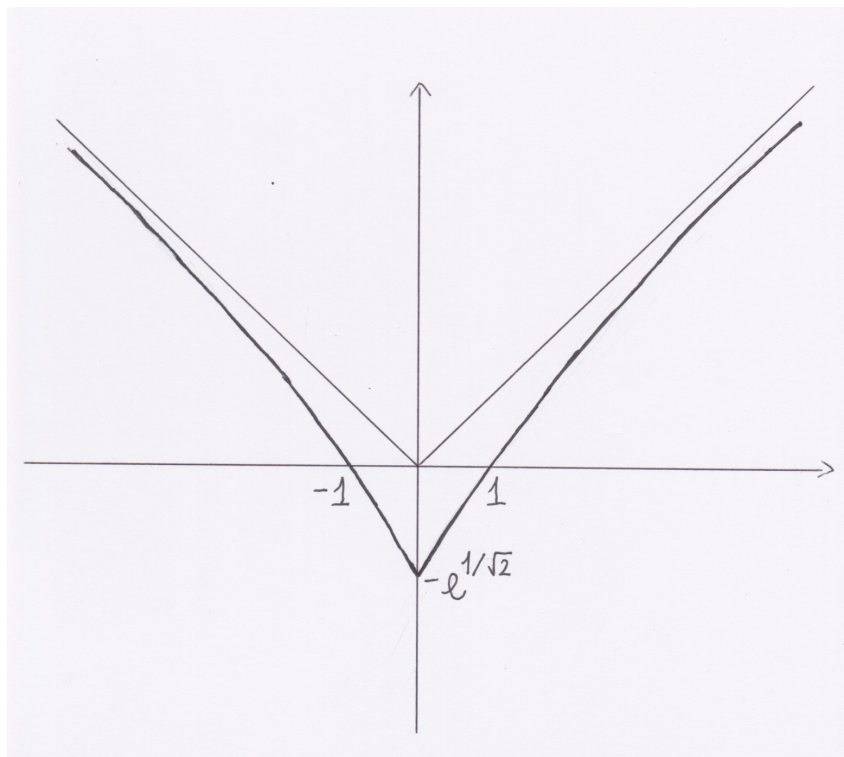
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+1}}} - 1 \right) - e^{\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+1}} - 1 = 0$$

$y = x$ asintoto a $+\infty$, $y = -x$ asintoto a $-\infty$.

Per $x > 0$ si ha $f'(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+1}}} \left(1 - (x^2 - 1)(x^2 + 2x + 2)^{-3/2} \right)$; pertanto f è sempre crescente.

$$f'_+(0) = e \left(1 + \frac{1}{2^{3/2}} \right), \quad f'_-(0) = -e \left(1 + \frac{1}{2^{3/2}} \right).$$

$x = 0$ punto angoloso.



Cognome (in STAMPATELLO): Nome (in STAMPATELLO):

Esercizio 4. [7 punti] Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale improprio esiste finito:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^\alpha} \arcsin \frac{1}{x} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

Svolgimento: Poiché $f \sim \frac{\pi}{2} \frac{1}{(x-1)^\alpha}$ per $x \rightarrow 1^-$ e $f \sim \frac{1}{x^{\alpha+1}}$ per $x \rightarrow +\infty$, f risulta integrabile in $(1, +\infty)$ se e solo se $0 < \alpha < 1$.

Calcoliamo l'integrale per $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} \arcsin \frac{1}{x} dx.$$

Integrando per parti:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x-1}} \arcsin \frac{1}{x} dx &= 2 \int (\sqrt{x-1})' \arcsin \frac{1}{x} dx \\ &= 2\sqrt{x-1} \arcsin \frac{1}{x} - 2 \int \sqrt{x-1} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx \\ &= 2\sqrt{x-1} \arcsin \frac{1}{x} + 2 \int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx \\ &= 2\sqrt{x-1} \arcsin \frac{1}{x} + 2 \log \frac{|\sqrt{x+1}-1|}{|\sqrt{x+1}+1|} + c. \end{aligned}$$

poiché, con la sostituzione $\sqrt{1+x} = t$,

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx = 2 \int \frac{1}{t^2-1} dt = \log \frac{|t-1|}{|t+1|} = \log \frac{|\sqrt{x+1}-1|}{|\sqrt{x+1}+1|} + c.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} \arcsin \frac{1}{x} dx &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2\sqrt{x-1} \arcsin \frac{1}{x} + 2 \log \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right) - 2 \log \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \\ &= -2 \log \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}. \end{aligned}$$

Esercizio 5. [5 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = e^y \frac{\log x + 1}{x(1 + \log^2 x)} . \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento: L'equazione differenziale è a variabili separabili:

$$\int e^{-y} dy = \int \frac{\log x + 1}{x(1 + \log^2 x)} dx.$$

Risolviamo il secondo integrale:

$$\int \frac{\log x + 1}{x(1 + \log^2 x)} dx = \int \frac{\log x}{x(1 + \log^2 x)} + \int \frac{1}{x(1 + \log^2 x)} = \frac{1}{2} \log(1 + \log^2 x) + \arctan \log x + c.$$

Pertanto

$$-e^{-y} = \frac{1}{2} \log(1 + \log^2 x) + \arctan \log x + c.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(1) = 0$ si ottiene $c = -1$. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = -\log \left(1 - \frac{1}{2} \log(1 + \log^2 x) - \arctan \log x \right).$$