Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Primo esonero a.a. 2025/2026–II Turno

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [14 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(1-\cos(\frac{1}{n^a}))^{\frac{1}{n^b}} - \sqrt{1+\frac{a\log(n)}{n^b}}}{\sin(\frac{1}{n^{b+1/2}})(\sin(n)+\sqrt{n}\log(1+n))}.$$

$[(a,b) = (5,2),(2,1),(3,2),(4,3)]$

Esercizio 2. [18 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = C \pm \sqrt{|a-\frac{b}{x^2}|}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità, intervalli di concavità/convessità, punti di flesso. È richiesto lo studio della derivata seconda.

$[(a,b,C) = (3,2,1),(2,3,2)$ e le altre versioni con il $-$ $(3,4,3),(4,3,4)]$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 1. [14 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(1-\cos(\frac{1}{n^a}))^{\frac{1}{n^b}} - \sqrt{1+\frac{a\log(n)}{n^b}}}{\sin(\frac{1}{n^{b+1/2}})(\sin(n)+\sqrt{n}\log(1+n))}.$$

$[(a,b) = (5,2),(2,1),(3,2),(4,3)]$

Svolgimento:
Scrivendo

$$(1-\cos(\frac{1}{n^a}))^{\frac{1}{n^b}} = e^{\frac{1}{n^b}\log(1-\cos(\frac{1}{n^a}))} = e^{\frac{1}{n^b}\log\left(\frac{1}{2n^{2a}}(1+o(1))\right)}$$

ed osservando che $\log(\frac{1}{2n^{2a}}) = -\log 2 - 2a\log n$ si ha che $\frac{1}{n^b}\log(\frac{1}{2n^{2a}}) = -\frac{2a}{n^b}\log n(1+o(1)) \to 0$ per $n\to+\infty$. Dunque usando che $e^y = 1+y+o(y)$ per $y\to 0$, si ha ponendo $y = -\frac{2a}{n^b}\log n(1+o(1))$

$$(1-\cos(\frac{1}{n^a}))^{\frac{1}{n^b}} = 1 - \frac{2a}{n^b}\log n + o(\frac{\log n}{n^b})$$

Mentre

$$\sqrt{1+\frac{a\log n}{n^b}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{a\log n}{n^b} + o(\frac{\log n}{n^b})$$

Pertanto il numeratore

$$(1-\cos(\frac{1}{n^a}))^{\frac{1}{n^b}} - \sqrt{1+\frac{a\log(n)}{n^b}} = -\frac{5a}{2}\frac{\log n}{n^b} + o(\frac{\log n}{n^b})$$

Al denominatore, il termine $\sin(\frac{1}{n^{b+1/2}}) = \frac{1}{n^{b+1/2}}(1+o(1))$. Mentre $\sin n$ è limitato e $\log(1+n) = \log n + \log(1+\frac{1}{n}) = (\log n)(1+o(1))$. Quindi per il denominatore si ha:

$$\sin(\frac{1}{n^{b+1/2}})(\sin(n)+\sqrt{n}\log(1+n)) = \frac{1}{n^{b+1/2}}\sqrt{n}(\log n)(1+o(1)) = \frac{1}{n^b}(\log n)(1+o(1))$$

Il limite viene pertanto

$$-\frac{5}{2}a$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. [18 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = C \pm \sqrt{|a - \frac{b}{x^2}|}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo

relativo, eventuali punti di non derivabilità, intervalli di concavità/convessità, punti di flesso.È richiesto lo studio della derivata seconda.

$[(a, b, C) = (3, 2, 1), (2, 3, 2)$ e le altre versioni con il $-$ $(3, 4, 3), (4, 3, 4)]$

Svolgimento: Consideriamo il caso $f(x) = C + \sqrt{|a - \frac{b}{x^2}|}$, l'altro si ottiene analogamente.
Dominio di f: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Poiché $\sqrt{|a - \frac{b}{x^2}|} \geq 0$ e si annulla in $\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$, risulta che $f(\pm\sqrt{\frac{b}{a}}) = C$ ed i punti $\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$ sono punti di minimo assoluto per f. Poiché f è pari, si può studiare in $(0, +\infty)$. Risulta:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = C + \sqrt{a}$$

Quindi f ha un asintoto verticale in $x = 0$;ed un asintoto orizzontale $y = C + \sqrt{a}$ per $|x| \to +\infty$.
Nell' intervallo $(0, +\infty)$ f è derivabile se $x \neq \sqrt{\frac{b}{a}}$ e risulta

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{|a - \frac{b}{x^2}|}} sign(a - \frac{b}{x^2}) \frac{b}{x^3}$$

quindi, $f'(x) > 0$ per $x \in (\sqrt{\frac{b}{a}}, +\infty)$, ed $f'(x) < 0$ per $x \in (0, \sqrt{\frac{b}{a}})$. quindi $\boxed{f \text{ è crescente in } (\sqrt{\frac{b}{a}}, +\infty)}$

$\boxed{f \text{ è decrescente in } (0, \sqrt{\frac{b}{a}})}$. Il punto $x_0 = \sqrt{\frac{b}{a}}$ è un punto di minimo assoluto dove f non è derivabile e si ha:

$$\lim_{x\to\sqrt{\frac{b}{a}}^+} f'(x) = +\infty \qquad \text{e} \quad \lim_{x\to\sqrt{\frac{b}{a}}^-} f'(x) = -\infty$$

Pertanto il punto x_0 è un punto di cuspide per f (analogamente sarà un punto di cuspide anche $x_1 = -\sqrt{\frac{b}{a}}$.

Sfruttando la simmetria pari si deduce anche che $\boxed{f \text{ è decrescente in } (-\infty, -\sqrt{\frac{b}{a}})}$ ed $\boxed{f \text{ è crescente in } (-\sqrt{\frac{b}{a}}, 0)}$

Risulta, per $x > 0, x \neq \sqrt{\frac{b}{a}}$

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{b}{x^6}(a - \frac{b}{x^2})^{-\frac{3}{2}}[b + 3x^2(a - \frac{b}{x^2})] < 0 & x > \sqrt{\frac{b}{a}} \\ \frac{b}{x^6}(\frac{b}{x^2} - a)^{-\frac{3}{2}}[-b + 3x^2(\frac{b}{x^2} - a)] & x \in (0, \sqrt{\frac{b}{a}}) \end{cases}$$

Quindi $\boxed{f \text{ è concava in } (\sqrt{\frac{b}{a}}, +\infty)}$, $\boxed{f \text{ è concava in } (\sqrt{\frac{2b}{3a}}, \sqrt{\frac{b}{a}})}$ e $\boxed{f \text{ è convessa in } (0, \sqrt{\frac{2b}{3a}})}$, e nel punto $x_2 = \sqrt{\frac{2b}{3a}}$ ha un flesso con $f'(x_2) = -\frac{3\sqrt{3}a}{4\sqrt{b}}$. Essendo f pari si ha anche che $\boxed{f \text{ è concava in } (-\infty, -\sqrt{\frac{b}{a}})}$,

$\boxed{f \text{ è concava in } (-\sqrt{\frac{2b}{3a}}, -\sqrt{\frac{b}{a}})}$ e $\boxed{f \text{ è convessa in } (-\sqrt{\frac{2b}{3a}}, 0)}$, e nel punto $x_3 = -\sqrt{\frac{2b}{3a}}$ ha un flesso con $f'(x_3) = \frac{3\sqrt{3}a}{4\sqrt{b}}$.