

Università di Roma “Tor Vergata” – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 19/02/2024-I Turno

Cognome: (in STAMPATELLO)
Nome: (in STAMPATELLO)
Matricola:
Titolare del corso:
Prova orale:

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	



Esercizio 1. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{2} (|x - a| + |x - b| + 4) e^{-1/x} \quad (f(x) = \frac{1}{2} (|x + a| + |x + b| + 4) e^{1/x}),$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.
 $[(a, b) = (3, 5), (9, 11)]$

Svolgimento: Consideriamo il caso che $f(x) = \frac{1}{2} (|x - a| + |x - b| + 4) e^{-1/x}$. Nell'altro caso basta scambiare x e $-x$.

Si osservi che $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(a - x + b - x + 4)e^{-1/x} = \left(\frac{a+b}{2} + 2 - x\right) e^{-1/x} & \text{se } x < a, x \neq 0 \\ \frac{1}{2}(x - a + b - x + 4)e^{-1/x} = \left(\frac{b-a}{2} + 2\right) e^{-1/x} & \text{se } a \leq x \leq b \\ \frac{1}{2}(x - a + x - b + 4)e^{-1/x} = \left(x - \frac{a+b}{2} + 2\right) e^{-1/x} & \text{se } x > b. \end{cases}$$

Perciò

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty, \quad f(x) > 0 \text{ per ogni } x \neq 0.$$

Poiché

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{a+b}{2} + 2 - x\right) \left(1 - \frac{1}{x}(1 + o(1))\right) = -x + \frac{a+b}{2} + 3 + o(1) & \text{per } x \rightarrow -\infty \\ \left(x - \frac{a+b}{2} + 2\right) \left(1 - \frac{1}{x}(1 + o(1))\right) = x - \frac{a+b}{2} + 1 + o(1) & \text{per } x \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

f ha gli asintoti obliqui $y = -x + \frac{a+b}{2} + 3$ per $x \rightarrow -\infty$ e $y = x - \frac{a+b}{2} + 1$ per $x \rightarrow +\infty$.
 Inoltre f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0, a, b\}$ e

$$f'(x) = \begin{cases} \left(\frac{\frac{a+b}{2} + 2 - x}{x^2} - 1\right) e^{-1/x} = \frac{-x^2 - x + \frac{a+b}{2} + 2}{x^2} e^{-1/x} & \text{se } x < a, x \neq 0 \\ \frac{\frac{b-a}{2} + 2}{x^2} e^{-1/x} > 0 & \text{se } a < x < b \\ \left(\frac{x - \frac{a+b}{2} + 2}{x^2} + 1\right) e^{-1/x} = \frac{x^2 + x - \frac{a+b}{2} + 2}{x^2} e^{-1/x} & \text{se } x > b. \end{cases}$$

In particolare $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ sono punti angolosi del grafico:

$$f'_-(a) = \frac{-a^2 + \frac{b-a}{2} + 2}{a^2} e^{-1/a} < 0 < f'_+(a) = \frac{\frac{b-a}{2} + 2}{a^2} e^{-1/a}$$

e

$$0 < f'_-(b) = \frac{\frac{b-a}{2} + 2}{b^2} e^{-1/b} < f'_+(b) = \frac{b^2 + \frac{b-a}{2} + 2}{b^2} e^{-1/b}.$$

Inoltre $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$.

Studiando i segni dei polinomi quadratici $-x^2 - x + \frac{a+b}{2} + 2$ e $x^2 + x - \frac{a+b}{2} + 2$ e ponendo

$$-x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{9 + 2(a+b)}, \quad x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{9 + 2(a+b)},$$

si trova che

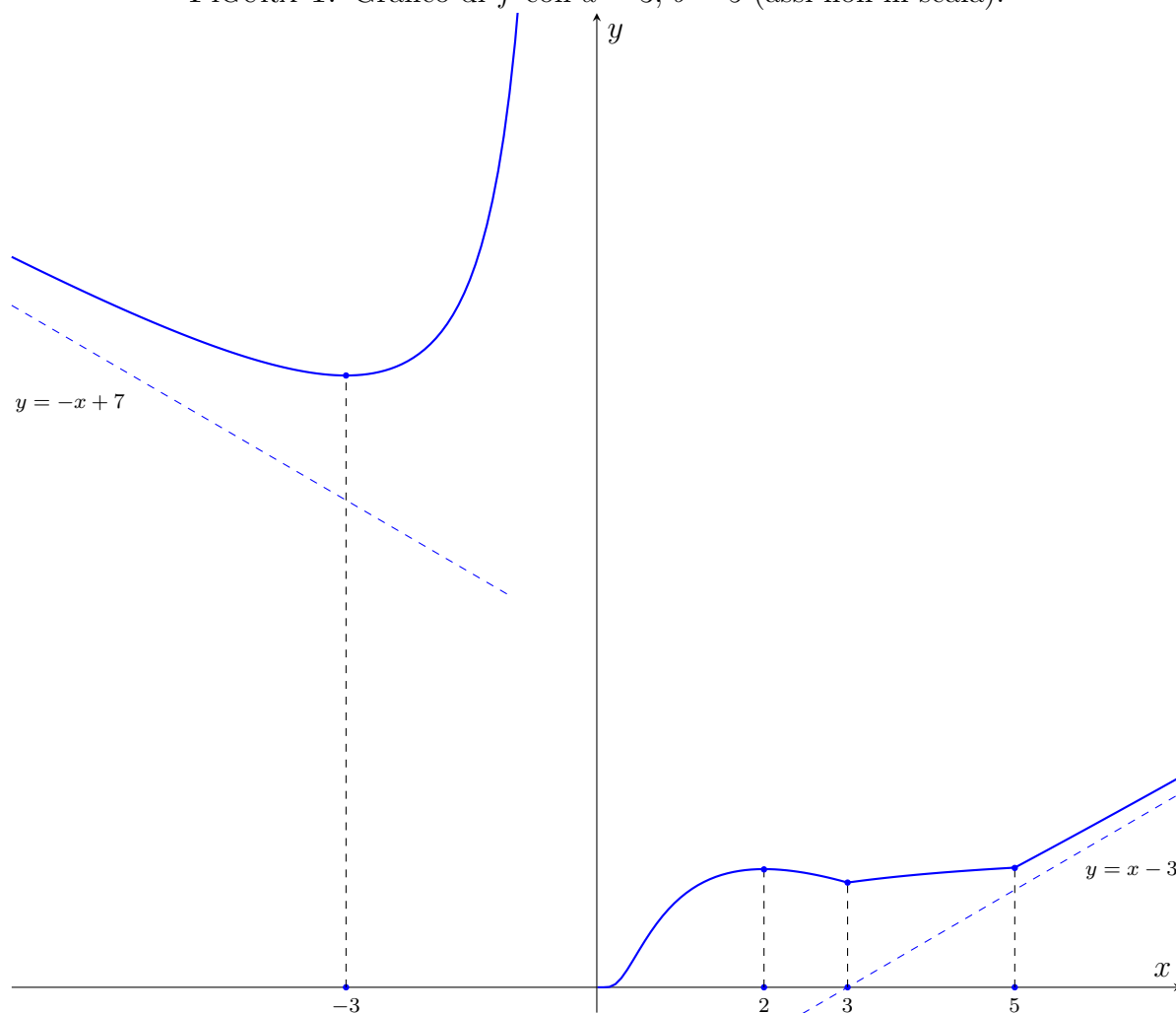
$$f'(x) \begin{cases} = 0 & \text{se } x = -x_1 \text{ oppure } x_2 \\ < 0 & \text{se } x < -x_1 \text{ oppure } x_2 < x < a \\ > 0 & \text{se } -x_1 < x < x_2 \text{ (} x \neq 0 \text{) oppure } x > a \text{ (} x \neq b \text{)}. \end{cases}$$

In particolare f è strettamente crescente in $[-x_1, 0)$, in $(0, x_2]$ e in $[a, +\infty)$ e strettamente decrescente in $(-\infty, -x_1]$ e in $[x_2, a]$. Essendo continua in $\mathbb{R}^-$ e in $\mathbb{R}^+$, f ha minimi locali in $x = -x_1$ e $x = a$ e un massimo locale in $x = 2$. f non ha estremi assoluti ($\sup f = +\infty$, $\inf f = 0$).

Riassumendo, abbiamo nella versione

- A: f ha AO $y = 7 - x$ ($y = x - 3$) per $x \rightarrow -\infty$ ($+\infty$); $x = \pm 3$ punti di minimo; $x = 2$ punto di massimo; $x = 0$ è AV per $x \rightarrow 0^-$; $x = 3$ e $x = 5$ punti angolosi; $f(x), f'(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0^+$;
- B: f ha AO $y = -3 - x$ ($y = x + 7$) per $x \rightarrow -\infty$ ($+\infty$); $x = \pm 3$ punti di minimo; $x = -2$ punto di massimo; $x = 0$ è AV per $x \rightarrow 0^+$; $x = -3$ e $x = -5$ punti angolosi; $f(x), f'(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0^-$;
- C: f ha AO $y = 13 - x$ ($y = x - 9$) per $x \rightarrow -\infty$ ($+\infty$); $x = -4$ e $x = 9$ punti di minimo; $x = 3$ punto di massimo; $x = 0$ è AV per $x \rightarrow 0^-$; $x = 9$ e $x = 11$ punti angolosi; $f(x), f'(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0^+$;
- D: f ha AO $y = -9 - x$ ($y = x - 13$) per $x \rightarrow -\infty$ ($+\infty$); $x = 4$ e $x = -9$ punti di minimo; $x = -3$ punto di massimo; $x = 0$ è AV per $x \rightarrow 0^+$; $x = -9$ e $x = -11$ punti angolosi; $f(x), f'(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0^-$.

FIGURA 1. Grafico di f con $a = 3$, $b = 5$ (assi non in scala).



Esercizio 2. [7 punti] Mettere le seguenti tre funzioni in ordine crescente di infinitesimo per $x \rightarrow -a$:

$$f(x) = b(x+a)^2 + e^{-1/(x+a)^2}$$

$$g(x) = \log(x+a+1) + 1 - \sin(x+a) - \cos(x+a)$$

$$h(x) = (x+a)^3 \log(|x+a|).$$

$$[(a, b) = (4, 1), (3, -2), (1, -3), (2, 5)]$$

Svolgimento: Si ha che, per $x \rightarrow -a$,

$$f(x) = b(x+a)^2(1+o(1));$$

$$\begin{aligned} g(x) &= (x+a) - \frac{1}{2}(x+a)^2 + \frac{1}{3}(x+a)^3 + 1 - (x+a) + \frac{1}{6}(x+a)^3 - 1 + \frac{1}{2}(x+a)^2 + o((x+a)^3) \\ &= \frac{1}{2}(x+a)^3(1+o(1)). \end{aligned}$$

Inoltre, poiché $\log(|x+a|) \rightarrow -\infty$ e $(x+a) \log(|x+a|) \rightarrow 0$, si ha che

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{1+o(1)}{2\log(|x+a|)} \rightarrow 0, \quad \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{(x+a) \log(|x+a|)}{b(1+o(1))} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow -a,$$

quindi l'ordine richiesto è

$$f(x), h(x), g(x).$$

Esercizio 3. [5 punti] Determinare il polinomio di Maclaurin di ordine 5 di

$$f(x) = \sin(\log(1 + ax)).$$

$$[a = \pm 2, \pm 3]$$

Svolgimento: Per $y \rightarrow 0$ si ha che $\log(1 + y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 + o(y^5)$ e $\sin y = y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{120}y^5 + o(y^5)$, quindi

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(ax - \frac{1}{2}a^2x^2 + \frac{1}{3}a^3x^3 - \frac{1}{4}a^4x^4 + \frac{1}{5}a^5x^5 + o(x^5)) \\ &= \left(ax - \frac{1}{2}a^2x^2 + \frac{1}{3}a^3x^3 - \frac{1}{4}a^4x^4 + \frac{1}{5}a^5x^5 + o(x^5)\right) \\ &\quad - \frac{1}{6} \left(ax - \frac{1}{2}a^2x^2 + \frac{1}{3}a^3x^3 + o(x^3)\right)^3 + \frac{1}{120} (ax + o(x))^5 + o(x^5) \\ &= ax - \frac{1}{2}a^2x^2 + \frac{1}{3}a^3x^3 - \frac{1}{4}a^4x^4 + \frac{1}{5}a^5x^5 + o(x^5) \\ &\quad - \frac{1}{6} \left(a^3x^3 - \frac{3}{2}a^4x^4 + a^5x^5 + \frac{3}{4}a^5x^5 + o(x^5)\right) + \frac{1}{120}(a^5x^5 + o(x^5)) + o(x^5) \\ &= ax - \frac{1}{2}a^2x^2 + \frac{1}{6}a^3x^3 + \frac{24-20-15+1}{120}a^5x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

Per l'unicità nel Teorema di Peano, il polinomio richiesto è

$$ax - \frac{1}{2}a^2x^2 + \frac{1}{6}a^3x^3 - \frac{1}{12}a^5x^5.$$

Esercizio 4. [6 punti] Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^b x + x^{b+2}}{x^\alpha \sqrt{e^{-x} + x^6}} dx.$$

$[b = 5, 4, 3, 2]$

Svolgimento: Poiché la funzione integranda è continua in $\mathbb{R}^+$, basta studiare la convergenza dell'integrale per $x \rightarrow 0^+$ e per $x \rightarrow +\infty$. Poiché

$$\frac{\sin^b x + x^{b+2}}{x^\alpha \sqrt{e^{-x} + x^6}} = x^{b-\alpha}(1 + o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+,$$

si ha che, per $x \rightarrow 0^+$, l'integrale converge se e solo se $b - \alpha > -1$, ovvero se e solo se $\alpha < b + 1$. Per $x \rightarrow +\infty$ invece si osservi che

$$\frac{\sin^b x + x^{b+2}}{x^\alpha \sqrt{e^{-x} + x^6}} = x^{b+2-\alpha-\frac{6}{2}}(1 + o(1)) = x^{b-1-\alpha}(1 + o(1)),$$

quindi l'integrale converge per $x \rightarrow +\infty$ se e solo se $b - 1 - \alpha < -1$, ovvero se e solo se $\alpha > b$. In conclusione, l'integrale improprio è convergente se e solo se $b < \alpha < b + 1$.

Esercizio 5. [5 punti] Sia $y \in C^1(\mathbb{R})$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} (ae^{-2x} + 1)y' = ay(e^{-2x} - 1) & \text{in } \mathbb{R} \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

Determinare $y(x)$ e il limite di $y(x)$ per $x \rightarrow +\infty$.

$[a = 7, 5, 1, 3]$

Svolgimento: L'equazione differenziale è del primo ordine, lineare e omogenea, quindi la sua soluzione generale è

$$y(x) = Ce^{A(x)}, \quad \text{dove } C \in \mathbb{R} \text{ e } A(x) = a \int \frac{e^{-2x} - 1}{ae^{-2x} + 1} dx.$$

Ponendo $t = e^{-2x} > 0$ si ha che $dx = -\frac{1}{2t} dt$ e

$$\begin{aligned} A(x) &= -\frac{a}{2} \int \frac{t-1}{t(at+1)} dt = -\frac{a}{2} \int \left(-\frac{1}{t} + \frac{a+1}{at+1} \right) dt \\ &= \frac{a}{2} \log t - \frac{a+1}{2} \log(at+1) = \frac{a}{2} \log e^{-2x} - \frac{a+1}{2} \log(ae^{-2x} + 1) \\ &= -ax - \frac{a+1}{2} \log(ae^{-2x} + 1). \end{aligned}$$

Si determina C dalla condizione $y(0) = -1$: $y(0) = Ce^{A(0)} = -1$, ovvero

$$C = -e^{-A(0)} = -e^{\frac{a+1}{2} \log(a+1)} = -(a+1)^{\frac{a+1}{2}}.$$

Perciò

$$y(x) = -(a+1)^{\frac{a+1}{2}} e^{-ax - \frac{a+1}{2} \log(ae^{-2x} + 1)} = -(a+1)^{\frac{a+1}{2}} e^{-ax} (1 + ae^{-2x})^{-\frac{a+1}{2}} \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

In particolare

$$y(x) = -(a+1)^{\frac{a+1}{2}} e^{-ax} (1 + o(1))^{-\frac{a+1}{2}} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow +\infty.$$