

**Università di Roma “Tor Vergata” – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 21/02/2023 – II turno**

Cognome: (in STAMPATELLO)
Nome: (in STAMPATELLO)
Matricola:
Titolare del corso:

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{(n+2a)(n-2a \log n)} - n + 2a \log(\sqrt{n-1}) - a}{n \left(\log \sqrt[n]{n} \right)^2}.$$

$$[a = -3, 3, -2, 2]$$

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $x \rightarrow 0^+$:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2), \quad \log(1+x) = x + o(x), \quad e^x = 1 + x + o(x).$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \sqrt{(n+2a)(n-2a \log n)} &= n \sqrt{\left(1 + \frac{2a}{n}\right) \left(1 - \frac{2a \log n}{n}\right)} = n \sqrt{1 - \frac{2a \log n}{n} + \frac{2a}{n} - \frac{4a^2 \log n}{n^2}} \\ &= n \left(1 - \frac{a \log n}{n} + \frac{a}{n} - \frac{a^2 \log^2 n}{2n^2} + o\left(\frac{\log^2 n}{n^2}\right) \right) \\ &= n - a \log n + a - \frac{a^2 \log^2 n}{2n} + o\left(\frac{\log^2 n}{n}\right), \end{aligned}$$

$$2a \log(\sqrt{n-1}) = a \log(n-1) = a \log n + a \log\left(1 - \frac{1}{n}\right) = a \log n - \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

da cui segue

$$\sqrt{(n+2a)(n-2a \log n)} - n + 2a \log(\sqrt{n-1}) - a = -\frac{a^2 \log^2 n}{2n} + o\left(\frac{\log^2 n}{n}\right).$$

D'altra parte

$$n \left(\log \sqrt[n]{n} \right)^2 = \frac{\log^2 n}{n}.$$

Si conclude che il limite richiesto vale

$$-\frac{a^2}{2}.$$

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = b \arcsin \left(\frac{x^2}{\sqrt{2x^4 - 2ax^2 + a^2}} \right)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$$[(a, b) = (2, 3), (2, 2), (3, 2), (3, 3)]$$

Svolgimento: Il dominio è

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} : 2x^4 - 2ax^2 + a^2 > 0, -1 \leq \frac{x^2}{\sqrt{2x^4 - 2ax^2 + a^2}} \leq 1 \right\}.$$

Poiché allora il discriminante del polinomio quadratico di x^2 , $2x^4 - 2ax^2 + a^2$, è $-a^2 < 0$, si ha $2x^4 - 2ax^2 + a^2 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre la disuguaglianza

$$\frac{x^2}{\sqrt{2x^4 - 2ax^2 + a^2}} \geq -1$$

è banalmente verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$, e la disuguaglianza

$$\frac{x^2}{\sqrt{2x^4 - 2ax^2 + a^2}} \leq 1 \Leftrightarrow x^2 \leq \sqrt{2x^4 - 2ax^2 + a^2} \Leftrightarrow x^4 - 2ax^2 + a^2 = (x^2 - a)^2 \geq 0$$

è anch'essa verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$, con l'uguaglianza valida per $x = \pm\sqrt{a}$. Dunque $D = \mathbb{R}$. Inoltre chiaramente la funzione data è pari, e basta dunque studiarla per $x \geq 0$.

Si ha poi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} b \arcsin \left(\frac{x^2}{\sqrt{2x^4 - 2ax^2 + a^2}} \right) = b \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}b,$$

e dunque la retta di equazione $y = b\pi/4$ è un asintoto orizzontale per $x \rightarrow \pm\infty$, mentre ovviamente il grafico della funzione non possiede asintoti verticali né obliqui.

La derivata è, per $x \neq \pm\sqrt{a}$ (punti in cui l'argomento dell'arcoseno vale 1, e non è quindi garantita la derivabilità di f),

$$\begin{aligned} f'(x) &= b \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^4}{2x^4 - 2ax^2 + a^2}}} \frac{2x\sqrt{2x^4 - 2ax^2 + a^2} - x^2 \frac{4x^3 - 2ax}{\sqrt{2x^4 - 2ax^2 + a^2}}}{2x^4 - 2ax^2 + a^2} \\ &= b \frac{1}{\sqrt{x^4 - 2ax^2 + a^2}} \frac{2x(2x^4 - 2ax^2 + a^2) - 4x^5 + 2ax^3}{2x^4 - 2ax^2 + a^2} \\ &= 2ab \frac{x(a - x^2)}{|x^2 - a|(2x^4 - 2ax^2 + a^2)}, \end{aligned}$$

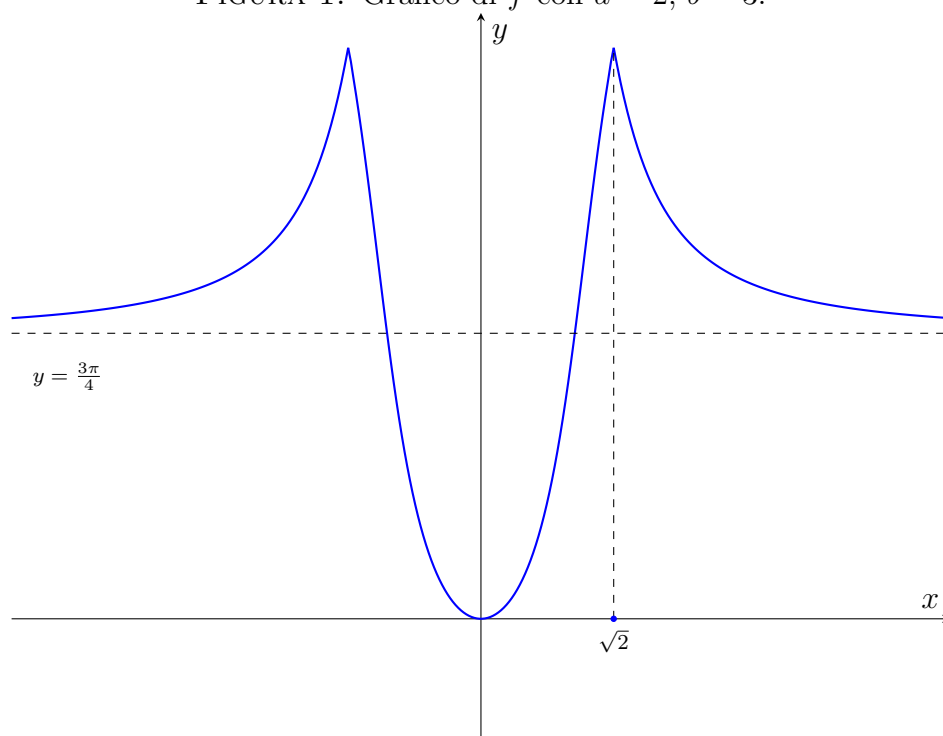
e inoltre, essendo $\frac{a-x^2}{|x^2-a|}$ l'opposto del segno di $x^2 - a$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{a}^{\pm}} f'(x) = \mp \frac{2b}{\sqrt{a}},$$

e dunque i punti del grafico di ascisse $x = \pm\sqrt{a}$ sono punti angolosi.

Infine chiaramente $f'(0) = 0$, e per $x > 0$ il segno di $f'(x)$ coincide con quello di $b(a - x^2)$, e dunque, se $b > 0$ la funzione f è crescente in $(0, \sqrt{a})$ e decrescente in $(\sqrt{a}, +\infty)$, ed ha pertanto un minimo in $x = 0$ e massimi in $x = \pm\sqrt{a}$. Viceversa se $b < 0$.

FIGURA 1. Grafico di f con $a = 2$, $b = 3$.



Esercizio 3. [7 punti] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{c(\alpha-1)x}}{(a \cosh(x) + b \sinh(x) + c)^{\alpha+1}} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 1$.

$$[(a, b, c) = (5, 4, 3), (5, 3, 4), (5, -3, 4), (5, -4, 3)]$$

Svolgimento: Notiamo che

$$\frac{1}{a \cosh(x) + b \sinh(x) + c} = \frac{2e^x}{(a+b)e^{2x} + 2ce^x + (a-b)}.$$

Convergenza: L'integrale converge per $\frac{c-1}{c+1} < \alpha < \frac{c+1}{c-1}$.

Infatti per $x \rightarrow +\infty$

$$\frac{e^{c(\alpha-1)x}}{(a \cosh(x) + b \sinh(x) + c)^{\alpha+1}} \sim e^{(c(\alpha-1) - (\alpha+1))x},$$

e l'integrale converge se e solo se $(c(\alpha-1) - (\alpha+1)) < 0$, ovvero $\alpha < \frac{c+1}{c-1}$.

Mentre per $x \rightarrow -\infty$

$$\frac{e^{c(\alpha-1)x}}{(a \cosh(x) + b \sinh(x) + c)^{\alpha}} \sim e^{(c(\alpha-1) + (\alpha+1))x},$$

e l'integrale converge se e solo se $(c(\alpha-1) + (\alpha+1)) > 0$, ovvero $\alpha > \frac{c-1}{c+1}$.

Calcolo per $\alpha = 1$: Cambio di variabile $t = e^x$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(a \cosh(x) + b \sinh(x) + c)^2} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4e^{2x}}{((a+b)e^{2x} + 2ce^x + (a-b))^2} dx \\ &= 4 \int_0^{+\infty} \frac{t}{((a+b)t^2 + 2ct + (a-b))^2} dt \\ &= \frac{4}{(a+b)^2} \int_0^{+\infty} \frac{t}{(t + \frac{c}{a+b})^4} dt \\ &= \frac{4}{(a+b)^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t + \frac{c}{a+b})^3} dt - \frac{4c}{(a+b)^3} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t + \frac{c}{a+b})^4} dt \\ &= \frac{2}{c^2} - \frac{4}{3c^2} \\ &= \frac{2}{3c^2}. \end{aligned}$$

Si noti infatti che nei tre casi abbiamo $c^2 = a^2 - b^2$.

Esercizio 4. [5 punti] Determinare la soluzione generale della seguente equazione differenziale

$$y'' - 4y' + 3y = Ax - Be^x.$$

$$[(A, B) = (2, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 3)]$$

Svolgimento: L'equazione omogenea associata $y'' - 4y' + 3y = 0$ ha soluzione generale $c_1e^x + c_2e^{3x}$.

L'equazione $y'' - 4y' + 3y = x$ ha come soluzione particolare $y = ax + b$ se $-4 + 3ax + 3b = x$, ovvero se $a = \frac{A}{3}$ e $b = \frac{4A}{9}$: $y = \frac{A}{3}x + \frac{4A}{9}$.

L'equazione $y'' - 4y' + 3y = -Ae^x$ ha come soluzione particolare $y = cxe^x$ se $c(2+x) - 4c(1+x) + 3cx = -B$, ovvero se $c = \frac{B}{2}$: $y = \frac{B}{2}xe^x$.

Allora la soluzione generale di $y'' - 4y' + 3y = x - e^x$ è $y = c_1e^x + c_2e^{3x} + \frac{A}{3}x + \frac{4A}{9} + \frac{B}{2}xe^x$.

Esercizio 5. [5 punti] Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$\frac{z+2}{|z|} = \frac{i}{a}.$$

$$[a = 2, 3, 4, 5]$$

Svolgimento: $z = 0$ non è soluzione. Se $z \neq 0$, posto $z = x + iy$ si ha

$$z + 2 = \frac{i}{a}|z| \Leftrightarrow x + 2 + iy = \frac{i}{a}\sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \\ y = \frac{1}{a}\sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = \frac{1}{a}\sqrt{4 + y^2} \end{cases}$$

ovvero

$$x = -2, \quad y = \frac{2}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Pertanto si ottiene un'unica soluzione $z = -2 + \frac{2i}{\sqrt{a^2 - 1}}$.