Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Canale M-O – Prof.ssa Teresa D'Aprile
Analisi Matematica I – Prova scritta del 17/09/2018

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^3}-\sqrt[3]{1-x^3}}{e^{\sin x}-e^{\arctan x}}.$$

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y\to 0$:

$$\sqrt{1+y}=1+\frac{y}{2}-\frac{y^2}{8}+o(y^2),\qquad \sqrt[3]{1+y}=1+\frac{y}{3}-\frac{y^2}{9}+o(y^2),$$

$$e^y=1+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}+o(y^3),\qquad \sin y=y-\frac{y^3}{6}+o(y^4),\qquad \arctan y=y-\frac{y^3}{3}+o(y^4).$$

Pertanto, poiché $\sin x\sim\arctan x\sim x$ per $x\to 0$,

$$\begin{aligned}
e^{\sin x}&=1+\sin x+\frac{\sin^2 x}{2}+\frac{\sin^3 x}{6}+o(x^3)\\
&=1+x-\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2}(x+o(x^2))^2+\frac{1}{6}(x+o(x^2))^3+o(x^3)\\
&=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^3),\\
e^{\arctan x}&=1+\arctan x+\frac{\arctan^2 x}{2}+\frac{\arctan^3 x}{6}+o(x^3)\\
&=1+x-\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}(x+o(x^2))^2+\frac{1}{6}(x+o(x^2))^3+o(x^3)\\
&=1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3),
\end{aligned}$$

da cui si deduce

$$e^{\sin x}-e^{\arctan x}=\frac{x^3}{6}+o(x^3).$$

D'altra parte

$$\sqrt{1+x^3}=1+\frac{x^3}{2}+o(x^3),\qquad \sqrt[3]{1-x^3}=1-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

da cui segue

$$\sqrt{1+x^3}-\sqrt[3]{1-x^3}=\frac{5}{6}x^3+o(x^3).$$

Pertanto il limite vale

$$5.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. [6 punti] Stabilire per quali valori dei parametri reali α, β la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} (\cos x + x\tan x)^\alpha & \text{se } x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \\ 1 + \beta x & \text{se } x \le 0 \end{cases}$$

è derivabile in $(-\infty, \frac{\pi}{2})$.

Svolgimento: f è continua e derivabile in $(0, \frac{\pi}{2})$ e $(-\infty, 0)$. Risulta

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 = f(0).$$

Pertanto f è continua in 0 (quindi in $(-\infty, \frac{\pi}{2})$) per ogni coppia α, β.
Si consideri dapprima il caso $\alpha = 0$: risulta $f(x) = 1$ per $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, quindi $f'_+(0) = 0$.
Sia ora $\alpha \neq 0$. Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y \to 0$:

$$(1 + y)^\alpha = 1 + \alpha y + o(y)$$

e

$$\cos y + y\tan y = 1 + \frac{y^2}{2} + o(y^2).$$

Poiché $\cos x + x\tan x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$ per $x \to 0$, risulta

$$(\cos x + x\tan x)^\alpha = 1 + \alpha(\cos x + x\tan x - 1) + o(x^2) = 1 + \frac{\alpha}{2}x^2 + o(x^2),$$

da cui segue

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\cos x + x\tan x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\alpha}{2}x^2 + o(x^2)}{x} = 0.$$

Essendo $f'_-(0) = \beta$, si deduce che f è derivabile in 0 (quindi in $(-\infty, \frac{\pi}{2})$) se e solo se $\beta = 0$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. **[8 punti]** Tracciare il grafico della funzione

$$\sqrt{|\sin x + \cos x|},$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Svolgimento: Dominio: $\mathbb{R}$. f è 2π-periodica, pertanto è sufficiente studiare l'andamento in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$.

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\Big), \qquad f(0) = f(\pi) = f\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = f\Big(\frac{3}{2}\pi\Big) = 1, \qquad f\Big(-\frac{\pi}{4}\Big) = f\Big(\frac{3}{4}\pi\Big) = 0.$$

Inoltre

$$\sin x + \cos x > 0 \ \ \forall x \in \Big(-\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\Big), \qquad \sin x + \cos x < 0 \ \ \forall x \in \Big(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\Big) \cup \Big(\frac{3}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi\Big).$$

Per $x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi)$ si ha: $f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{2\sqrt{\sin x + \cos x}}$; pertanto f è crescente in $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ e f è decrescente in $(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi)$.
Per $x \in (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}) \cup (\frac{3}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi)$ si ha: $f'(x) = \frac{-\cos x + \sin x}{2\sqrt{-\sin x - \cos x}}$; pertanto f è crescente in $(\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi)$ e f è decrescente in $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4})$ e $(\frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi)$.

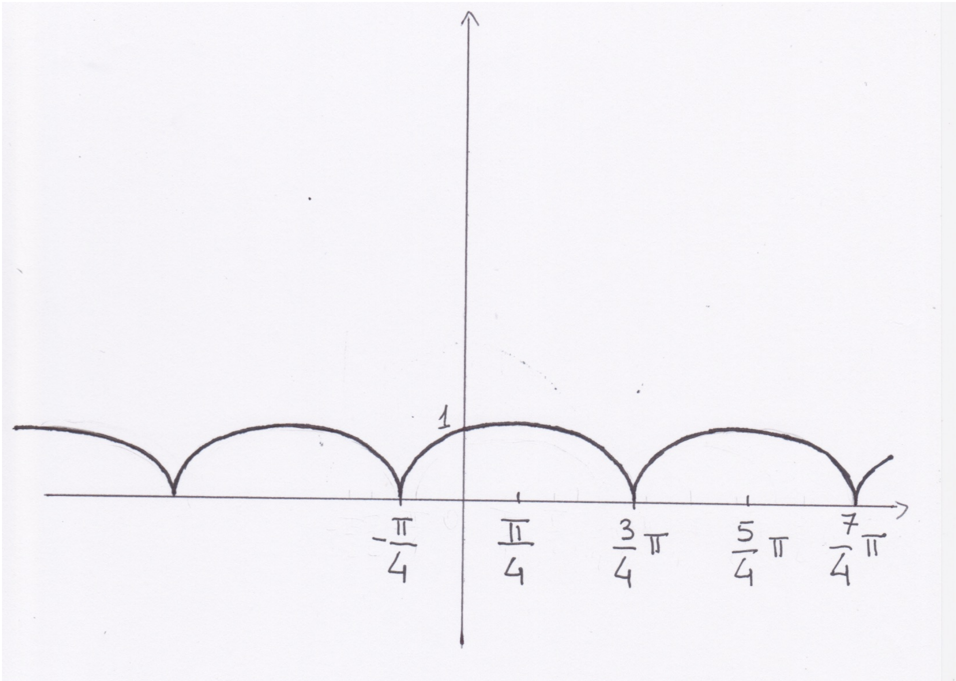
$\boxed{x = \frac{\pi}{4},\ x = \frac{5}{4}\pi \text{ punti di massimo relativo.}}$

$\boxed{x = -\frac{\pi}{4},\ x = \frac{3}{4}\pi \text{ punti di minimo relativo.}}$

Inoltre

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{4}^-} f'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to -\frac{\pi}{4}^+} f'(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to (\frac{3}{4}\pi)^-} f'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to (\frac{3}{4}\pi)^+} f'(x) = +\infty.$$

$\boxed{x = -\frac{\pi}{4},\ x = \frac{3}{4}\pi \text{ cuspidi.}}$



Cognome (in `STAMPATELLO`): .... Nome (in `STAMPATELLO`):..

Esercizio 4. **[6 punti]** Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{+\infty} x \cdot \left(\frac{1}{x^\alpha} - \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) dx.$$

Svolgimento: Sia

$$F(x) = x \cdot \left(\frac{1}{x^\alpha} - \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Risulta

$$F(x) = x \cdot \left(\frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{x} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\right) = \frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1 + o\Big(\frac{1}{x}\Big) \text{ per } x \to +\infty.$$

Se $\alpha < 1$ si ha $F(x) \sim x^{1-\alpha}$ per $x \to +\infty$, pertanto F non è integrabile in $(1, +\infty)$, quindi in $\mathbb{R}$.
Se $\alpha > 1$ si ha $F(x) \sim -1$ per $x \to +\infty$, pertanto F non è integrabile in $(1, +\infty)$, quindi in $\mathbb{R}$.
Sia ora $\alpha = 1$: si ha

$$F(x) = x \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{6x^3} + o\Big(\frac{1}{x^4}\Big)\right) = \frac{1}{6x^2} + o\Big(\frac{1}{x^3}\Big).$$

Essendo $F(x) \sim \frac{1}{6x^2}$ per $x \to +\infty$, si deduce F è integrabile in $(1, +\infty)$. D'Altra parte, se $\alpha = 1$, $|F(x)| \le x(\frac{1}{x} + 1) = 1 + x$, da cui segue che F è integrabile in $(0, 1)$, Si conclude che F è integrabile in $(0, +\infty)$ se e solo se $\alpha = 1$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 5. [5 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - 2yx = e^{x^2} \dfrac{e^{-x}}{e^x - 1} \\ y(1) = 1 \end{cases}.$$

Svolgimento: L'equazione differenziale è lineare del I ordine. Una primitiva della funzione $a(x) = -2x$ è $A(x) = -x^2$. Una primitiva della funzione $b(x) = e^{A(x)} e^{x^2} \frac{e^{-x}}{e^x - 1} = \frac{e^{-x}}{e^x - 1}$ è (con la sostituzione $e^x = t$)

$$B(x) = \int \frac{e^{-x}}{e^x - 1} dx = \int \frac{1}{t^2(t-1)} dt = \int \Big(-\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t-1} \Big) dt$$
$$= -\log|t| + \frac{1}{t} + \log|t-1| = -x + e^{-x} + \log|e^x - 1|.$$

Però, dato che la funzione $e^x - 1$ è positiva per $x > 0$, in tale intervallo si ha

$$B(x) = -x + e^{-x} + \log(e^x - 1).$$

Pertanto risulta

$$y(x) = ce^{-A(x)} + B(x) e^{-A(x)} = \Big(c - x + e^{-x} + \log(e^x - 1) \Big) e^{x^2},$$

da cui, imponendo la condizione iniziale $y(1) = 1$, si determina la costante c:

$$c = 1 - \log(e - 1).$$

Perciò la soluzione è:

$$y(x) = \Big(1 - \log(e - 1) - x + e^{-x} + \log(e^x - 1) \Big) e^{x^2}.$$