Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Canale M-O – Prof.ssa Teresa D'Aprile
Analisi Matematica I – Prova scritta del 19/02/2018 (Compito D)

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 1. **[6 punti]** Calcolare lo sviluppo di McLaurin dell'ordine $n = 4$ per la seguente funzione:

$$\log(\cos x + \arctan x).$$

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y \to 0$:

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + o(y^4), \qquad \cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + o(y^4), \qquad \arctan y = y - \frac{y^3}{3} + o(y^4),$$

da cui

$$\cos x - 1 + \arctan x = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

Poiché $\cos x - 1 + \arctan x \sim x$ per $x \to 0$, si ha

$$\begin{aligned}
&\log(\cos x + \arctan x) = \log\big(1 + (\cos x - 1 + \arctan x)\big) \\
&= \cos x - 1 + \arctan x - \frac{(\cos x - 1 + \arctan x)^2}{2} + \frac{(\cos x - 1 + \arctan x)^3}{3} - \frac{(\cos x - 1 + \arctan x)^4}{4} + o(x^4) \\
&= x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\Big(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\Big)^2 + \frac{1}{3}\Big(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\Big)^3 - \frac{1}{4}(x + o(x))^4 + o(x^4) \\
&= x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\Big(x^2 + \frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{2}{3}x^4\Big) + \frac{1}{3}x^3\Big(1 - \frac{x}{2} + o(x)\Big)^3 - \frac{x^4}{4}(1 + o(1))^4 + o(x^4) \\
&= x - x^2 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{4} + \frac{1}{3}x^3\Big(1 - \frac{3}{2}x + o(x)\Big) - \frac{x^4}{4}(1 + o(1)) + o(x^4) \\
&= x - x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\log(2^n+e^n)+\log^4 n\Big)\Big(\sqrt[3]{n^2+n^3}-n-\frac{1}{3}\Big).$$

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y\to 0$:

$$\sqrt[3]{1+y}=1+\frac{y}{3}-\frac{y^2}{9}+o(y^2),\qquad \log(1+y)=y+o(y).$$

Risulta:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{n^2+n^3}-n-\frac{1}{3}&=n\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}-n-\frac{1}{3}=n\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}-1\right)-\frac{1}{3}\\&=n\left(\frac{1}{3n}-\frac{1}{9n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)-\frac{1}{3}=-\frac{1}{9n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log(2^n+e^n)+\log^4 n&=n+\log\left(1+\left(\frac{2}{e}\right)^n\right)+\log^4 n\\&=n+\left(\frac{2}{e}\right)^n+o\left(\left(\frac{2}{e}\right)^n\right)+\log^4 n=n(1+o(1)).\end{aligned}$$

Pertanto il limite vale

$$-\frac{1}{9}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt{e^x - 1} - \left|\log(e^x - 1)\right|$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Svolgimento: Dominio: $(0, +\infty)$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty.$$

$\boxed{x = 0 \text{ asintoto verticale.}}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{e^x - 1} - \log(e^x - 1)\right) = +\infty.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{e^x - 1} - \log(e^x - 1)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x/2}(1 + o(1))}{x} = +\infty.$$

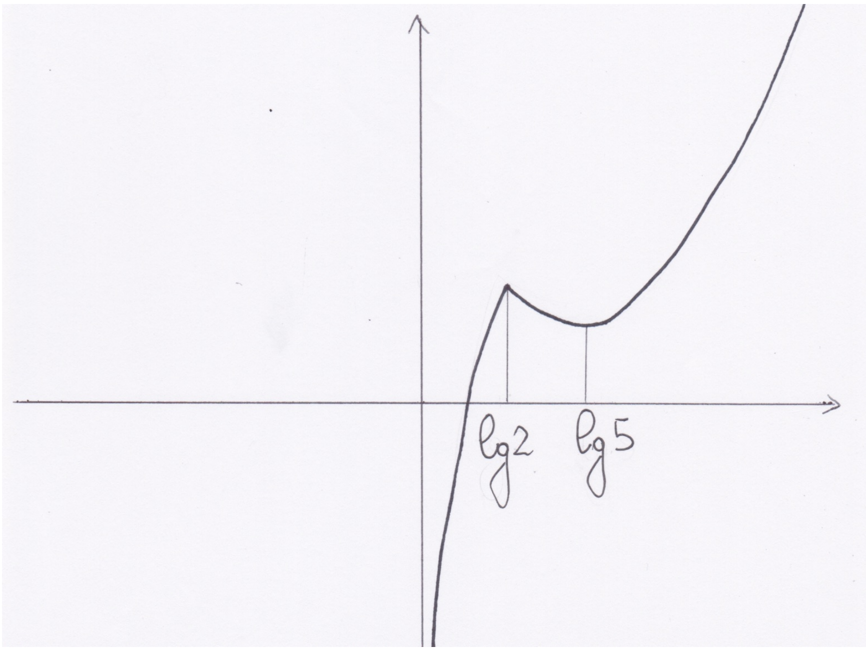
Per $x > \log 2$: $f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\right)$, quindi f è decrescente per $\log 2 < x < \log 5$ e f è crescente per $x > \log 5$.

Per $0 < x < \log 2$: $f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\right)$, quindi f è crescente.

$\boxed{x = \log 5 \text{ punto di minimo relativo.}}$

$$f'_+(\log 2) = -1 \qquad f'_-(\log 2) = 3.$$

$\boxed{x = \log 2 \text{ punto angoloso.}}$



Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. [7 punti] Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale improprio esiste finito:

$$\int_1^2 \frac{x^2}{(x^2-1)^\alpha} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

Svolgimento: Risulta

$$f \sim \frac{1}{(2(x-1))^\alpha} \text{ per } x \to 1^-.$$

Pertanto f è integrabile su $(1,2)$ se e solo se $\alpha < 1$.

Calcoliamo l'integrale per $\alpha = \frac{1}{2}$. Utilizziamo la sostituzione $x = \cosh t$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} dx = \int (\cosh t)^2 dt = \int \frac{e^{2t}+e^{-2t}+2}{4} dt &= \frac{e^{2t}-e^{-2t}}{8} + \frac{t}{2} + c \\
&= \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^2}{8} - \frac{1}{8(x+\sqrt{x^2-1})^2} + \frac{\log(x+\sqrt{x^2-1})}{2} + c \\
&= \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^2}{8} - \frac{(x-\sqrt{x^2-1})^2}{8} + \frac{\log(x+\sqrt{x^2-1})}{2} + c \\
&= \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} + \frac{\log(x+\sqrt{x^2-1})}{2} + c.
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} dx = \sqrt{3} + \frac{\log(2+\sqrt{3})}{2}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 5. [5 punti] Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y'' + y' + y = e^{3x} - 2.$$

Svolgimento: L'equazione differenziale è lineare del secondo ordine non omogenea. Dato che le soluzioni dell'equazione caratteristica $\lambda^2+\lambda+1 = 0$ sono $\lambda = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$, la soluzione generica dell'equazione omogenea associata sarà

$$c_1 e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 e^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Dal momento che 3 non è soluzione dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$\bar{y}(x) = ae^{3x} + b,$$

per cui, sostituendo nell'equazione,

$$13ae^{2x} + b = e^{3x} + 1,$$

da cui otteniamo

$$a = \frac{1}{13}, \quad b = -2.$$

Si conclude che la soluzione dell'equazione differenziale sono

$$c_1 e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 e^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{1}{13}e^{3x} - 2, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$