Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica 1 – I esonero a.a. 2025/2026 – I turno

Cognome: (in `STAMPATELLO`)
Nome: (in `STAMPATELLO`)
Matricola:
Titolare del corso:

Esercizio	**Punteggio**
1	
2	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [14 punti] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\sqrt[n]{a}-1)\log n - \sqrt[n]{n+b}+1}{\sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{bn+a}}\right)\cdot\log(an^2+b)}.$$

$[(a,b) = (5,2),(4,3),(3,2),(2,5)]$

Svolgimento: Si ha

$$\sqrt[n]{a} = e^{\frac{\log a}{n}} = 1+\frac{\log a}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big),$$
$$\sqrt[n]{n+b} = e^{\frac{\log(n+b)}{n}} = e^{\frac{\log n}{n}+\frac{1}{n}\log(1+\frac{b}{n})} = e^{\frac{\log n}{n}+\frac{b}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})} = 1+\frac{\log n}{n}+o\Big(\frac{\log n}{n}\Big),$$

da cui segue

$$(\sqrt[n]{a}-1)\log n - \sqrt[n]{n+b}+1 = \big(\log a - 1\big)\frac{\log n}{n}+o\Big(\frac{\log n}{n}\Big).$$

D'altra parte

$$\sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{bn+a}}\right) = \frac{1}{bn}+o\Big(\frac{1}{n}\Big), \qquad \log(an^2+b) = 2\log n + o(\log n).$$

Si conclude che il limite richiesto vale

$$\frac{b}{2}(\log a - 1).$$

Esercizio 2. [18 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = 2x + \log\left(|4e^x - e^{-x}|\right)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità, intervalli di concavità/convessità, eventuali flessi. È richiesto lo studio della derivata seconda.

$$\Big[f(x) = -2x + \log(|4e^x - e^{-x}|),\;\; 2x + \log(|4e^{-x} - e^x|),\;\; -2x + \log(|4e^{-x} - e^x|)\Big]$$

<u>*Svolgimento:*</u> Il dominio è dato da $4e^x - e^{-x} \neq 0$, ovvero $x \neq -\log 2$. La retta $x = -\log 2$ è asintoto verticale e si ha $\lim_{x\to -\log 2} f(x) = -\infty$. Il comportamento all'infinito dice che

$$\text{per } x \to +\infty, \text{ si ha} \quad f(x) = 2x + \log(4e^x - e^{-x}) = 3x + \log 4 + \log(1 - \frac{1}{4}e^{-2x}) = 3x + \log 4 + o(1)$$

quindi $f(x) \to +\infty$ e la retta $y = 3x + \log 4$ è asintoto obliquo a $+\infty$. Analogamente si vede che $f(x) \to -\infty$ per $x \to -\infty$ e ha asintoto obliquo $y = x$.
La derivata di f risulta

$$f'(x) = 2 + \frac{4e^x + e^{-x}}{4e^x - e^{-x}} = \frac{12e^x - e^{-x}}{4e^x - e^{-x}}$$

pertanto f è crescente nell'intervallo $(-\log 2, +\infty)$, e anche nell'intervallo $(-\infty, -\frac{1}{2}\log(12))$, mentre è decrescente per $-\frac{1}{2}\log(12) < x \leq -\log 2$. Il punto $x = -\frac{1}{2}\log(12)$ risulta un massimo locale. Infine:

$$f''(x) = \frac{(4e^x - e^{-x})^2 - (4e^x + e^{-x})^2}{(4e^x - e^{-x})^2} = -\frac{16}{(4e^x - e^{-x})^2}$$

pertanto la funzione risulta concava in $(-\infty, -\log 2)$ e in $(-\log 2, +\infty)$.

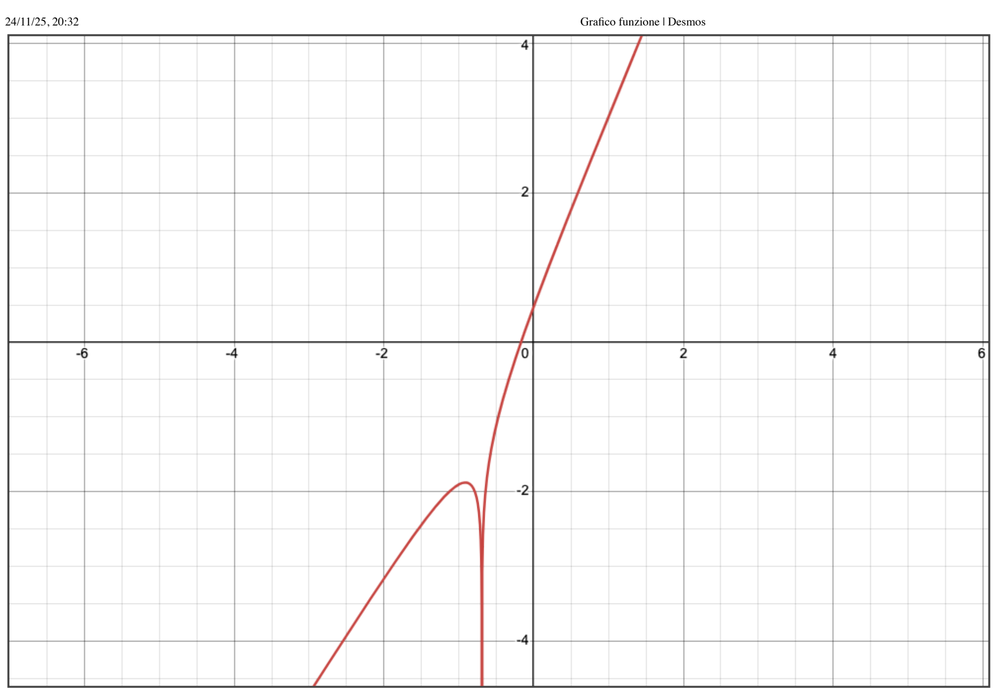

FIGURA 1. Grafico di f

https://www.desmos.com/calculator/kjffycwppc?lang=it 1/3