

Università di Roma “Tor Vergata” – Corso di Laurea in Ingegneria  
Analisi Matematica I – Prova scritta settembre 2022 – I appello

|                                     |
|-------------------------------------|
| <b>Cognome:</b><br>(in STAMPATELLO) |
| <b>Nome:</b><br>(in STAMPATELLO)    |
| <b>Matricola:</b>                   |
| <b>Titolare del corso:</b>          |
| <b>Prova orale:</b>                 |

| Esercizio     | Punteggio |
|---------------|-----------|
| 1             |           |
| 2             |           |
| 3             |           |
| 4             |           |
| 5             |           |
| <b>Totale</b> |           |

A/B/C/D

**Esercizio 1. [6 punti]** Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n}{\sqrt{n^2 + an + 1}} - \cos \sqrt{\frac{a}{n}} \right) (n + a \log^3 n)^2.$$

[ $a = 2, 3, 4, 5$ ]

Svolgimento:

Notiamo che

$$(n + a \log^3 n)^2 = n^2 \left( 1 + \frac{a \log^3 n}{n} \right)^2 = n^2(1 + o(1)) \quad \text{per } n \rightarrow \infty,$$

pertanto sarà sufficiente sviluppare l'altro fattore fino all'ordine 2. Ora

$$\cos \sqrt{\frac{a}{n}} = 1 - \frac{a}{2n} + \frac{a^2}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

d'altra parte

$$\begin{aligned} \frac{n}{\sqrt{n^2 + an + 1}} &= \frac{1}{\sqrt{1 + 1/n + 1/n^2}} \\ &= \left( 1 + \frac{a}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{a}{n} + \frac{1}{n^2} \right) + \frac{3}{8} \left( \frac{a}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= 1 - \frac{a}{2n} + \left( \frac{3a^2}{8} - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Quindi

$$\frac{n}{\sqrt{n^2 + an + 1}} - \cos \sqrt{\frac{a}{n}} = \left( \frac{a^2}{3} - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

e, in conclusione,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n}{\sqrt{n^2 + an + 1}} - \cos \sqrt{\frac{a}{n}} \right) (n + a \log^3 n)^2 = \frac{a^2}{3} - \frac{1}{2}.$$

**Esercizio 2.** [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{\ln |ax| - 1}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$$[a = 5, 4, 3, 2]$$

Svolgimento:

**Dominio:** La funzione è pari. Il dominio è  $D = \mathbb{R} \setminus \{0, \pm e/a\}$ .

**Limiti di frontiera:**

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow +\infty && \text{per } x \rightarrow +\infty \\ f(x) &\rightarrow +\infty && \text{per } x \rightarrow \left(\frac{e}{a}\right)^+ \\ f(x) &\rightarrow -\infty && \text{per } x \rightarrow \left(\frac{e}{a}\right)^- \\ f(x) &\rightarrow 0 && \text{per } x \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

Pertanto  $f$  ha un asintoto verticale in  $\frac{e}{a}$ . Inoltre, poiché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty,$$

la funzione non ha asintoti obliqui. Il punto 0 è una discontinuità eliminabile.

**Derivata:** La funzione è derivabile per ogni  $x \in D$  e

$$f'(x) = \frac{x(2 \ln |ax| - 3)}{(\ln |ax| - 1)^2}.$$

Consideriamo il caso  $x > 0$ . Abbiamo che

$$f'(x) > 0 \iff x > \frac{e^{\frac{3}{2}}}{a}.$$

Nel caso  $x < 0$  invece

$$f'(x) > 0 \iff 0 > x > -\frac{e^{\frac{3}{2}}}{a}.$$

Quindi

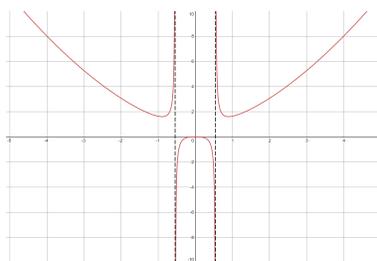
$$\pm \frac{e^{\frac{3}{2}}}{a}$$

sono punti di minimo locale.

Osserviamo che, poiché

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x),$$

la funzione si può estendere per continuità ad una funzione derivabile in  $x = 0$ .



---

**Esercizio 3.** [7 punti] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{\alpha x} + a}{e^{2x} + 1} dx.$$

Calcolarlo per  $\alpha = 1$ .

[ $a = 2, 3, 4, 5$ ]

Svolgimento: La funzione integranda è continua per ogni  $x \geq 0$ , l'integrale è improprio a causa dell'estremo a  $+\infty$ . L'integrale converge se e solo se  $\alpha < 2$ .

Per calcolare l'integrale consideriamo il cambio di variabile  $y = e^x$ , che da  $dx = dy/y$ . Allora

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{e^x + a}{e^{2x} + 1} dx &= \int_1^{+\infty} \frac{y + a}{y(y^2 + 1)} dy \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1 - ay}{y^2 + 1} dy + \int_1^{+\infty} \frac{a}{y} dy \\ &= \left[ \arctan(y) - \frac{a}{2} \ln(1 + y^2) + a \ln(y) \right]_1^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{4} + a \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{X}{\sqrt{1 + X^2}} \right) + \frac{a}{2} \ln(2) \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{a}{2} \ln(2). \end{aligned}$$

**Esercizio 4. [5 punti]** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' \sin x + y \cos x = e^x \\ y(a) = 0 \end{cases}.$$

$$[a = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{2}{3}\pi]$$

Svolgimento:

Si noti che  $\sin(a) \neq 0$ . Consideriamo l'equazione omogenea associata

$$y' \sin x + y \cos x = 0,$$

la cui soluzione generale soddisfa

$$\begin{aligned} y' \sin x + y \cos x = 0 &\iff \frac{y'(x)}{y(x)} = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \\ &\iff \ln(y(x)) = -\ln(\sin(x)) + \text{cost} \\ &\iff y(x) = \frac{C}{\sin(x)}, \end{aligned}$$

per  $C \in \mathbb{R}$ ,  $C > 0$ . Utilizziamo il metodo di variazione delle costanti per determinare la soluzione generale. Cerchiamo una soluzione della forma

$$y(x) = \frac{C(x)}{\sin(x)},$$

per una funzione  $C(x)$  da determinare. Allora

$$\begin{aligned} y' \sin x + y \cos x = e^x &\iff \frac{C'(x) \sin x - C(x) \cos x}{\sin^2 x} \sin x + \frac{C(x)}{\sin x} \cos x = e^x \\ &\iff C'(x) = e^x. \end{aligned}$$

La soluzione generale è

$$y(x) = \frac{e^x + K}{\sin(x)}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione iniziale troviamo che l'unica soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{e^x - e^a}{\sin(x)}.$$

---

**Esercizio 5 [5 punti]** Risolvere in  $\mathbb{C}$  la seguente equazione:

$$z|z| - 2z - 1 = 0 \quad \left[ 1 - 2z - z|z| = 0, \quad z|z| - 2z - 2 = 0, \quad z|z| - 2 + 2z = 0 \right].$$

Svolgimento:

Sia  $z = x + iy$ , allora

$$z|z| - 2z - 1 = 0 \iff (x + iy)\sqrt{x^2 + y^2} - 2(x + iy) - 1 = 0 \iff \begin{cases} x\sqrt{x^2 + y^2} - 2x - 1 = 0 \\ y\sqrt{x^2 + y^2} - 2y = 0. \end{cases}$$

La seconda equazione del sistema, per la parte immaginaria  $y$ , è verificata solo se

$$y = 0, \quad \text{o} \quad \sqrt{x^2 + y^2} = 2.$$

Notiamo che  $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$  non è ammissibile perché in contraddizione con la prima equazione, quella della parte reale  $x$ . Pertanto  $y = 0$ . La prima equazione diventa  $x|x| - 2x - 1 = 0$ .

Consideriamo il caso  $x < 0$ . La parte reale  $x$  verifica

$$-x^2 - 2x - 1 = 0 \iff (x + 1)^2 = 0 \iff x = -1.$$

Nel caso  $x > 0$  abbiamo

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \iff x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Notiamo che  $1 - \sqrt{2} < 0$  e, pertanto, non può essere soluzione.

Le soluzioni in  $\mathbb{C}$  di  $z|z| - 2z - 1 = 0$  sono

$$z = -1 \quad \text{e} \quad z = 1 + \sqrt{2}.$$