

Università di Roma “Tor Vergata” – Corso di Laurea in Ingegneria  
Analisi Matematica I – Prova scritta del 13/07/2023

<b>Cognome:</b> (in STAMPATELLO)
<b>Nome:</b> (in STAMPATELLO)
<b>Matricola:</b>
<b>Titolare del corso:</b>

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
<b>Totale</b>	

A/B/C/D

**Esercizio 1. [6 punti]** Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\cosh x - \cos x} - \sin x - \log(\sqrt[6]{1+x^3})}{(\sinh x - \sin x)^a}$$

$[a = \frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{2}{3}, \frac{8}{3}]$ .

Svolgimento:

Analizziamo gli addendi al numeratore:

- $\cosh x - \cos x = x^2 + \frac{x^6}{360} + o(x^6)$   
 $\implies (\cosh x - \cos x)^{1/2} = x \left(1 + \frac{x^4}{360} + o(x^4)\right)^{1/2} = x \left(1 + \frac{1}{2} \frac{x^4}{360} + o(x^4)\right),$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6),$
- $\log(\sqrt[6]{1+x^3}) = \frac{1}{6} \log(1+x^3) = \frac{x^3}{6} + o(x^5).$

Quindi risulta

$$\text{Numeratore} = x + \frac{x^5}{720} - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} + o(x^5) = -\frac{1}{144}x^5 + o(x^5).$$

Per quanto riguarda il denominatore, poiché  $\sinh x - \sin x = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ , risulta

$$\text{Denominatore} = (\sinh x - \sin x)^a = \frac{x^{3a}}{3^a} + o(x^{3a}).$$

Quindi il limite proposto risulta uguale a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{144}x^5 + o(x^5)}{\frac{x^{3a}}{3^a} + o(x^{3a})} = \begin{cases} -\infty & \text{se } a = \frac{7}{3}, \frac{8}{3} \\ 0 & \text{se } a = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}. \end{cases}$$

**Esercizio 2. [8 punti]** Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \pm(\log x + a)x \log^3 x$$

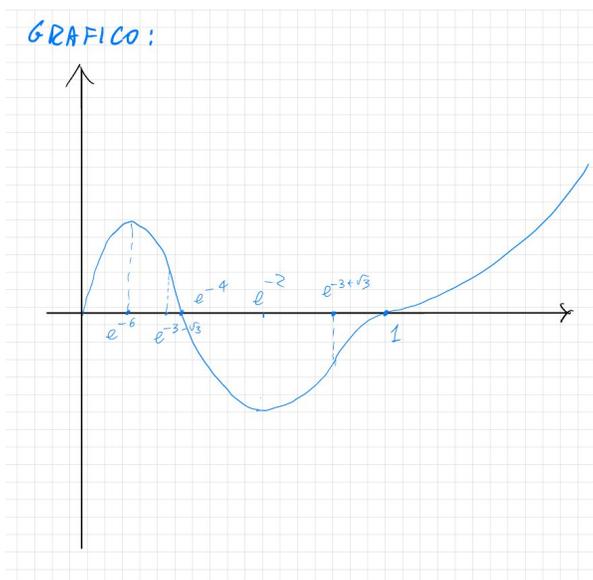
specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità.

**Facoltativo:** studiare la derivata seconda e determinare gli intervalli di concavità/convessità e eventuali punti di flesso.

$[a = 4, -4]$ .

Svolgimento: La funzione sotto studiata è  $f(x) = (\log x + 4)x \log^3 x$ .

- Non vi sono simmetrie né periodicità.
- $\mathcal{D}(f) = (0, +\infty)$ .
- $f \in C^\infty(\mathcal{D})$ .
- $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (0, e^{-4}] \cup [1, +\infty)$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0^+$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ .
- $f'(x) = (\log^2 x)(\log^2 x + 8 \log x + 12)$ .  
Osserviamo che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$ , quindi non possono esserci asintoti obliqui.
- $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (0, e^{-6}] \cup [e^{-2}, +\infty)$ .  
 $e^{-6}$  risulta essere punto di massimo relativo, con  $f(e^{-6}) = \frac{2 \cdot 6^3}{e^6}$ .  
 $e^{-2}$  risulta essere punto di minimo assoluto, con  $f(e^{-2}) = -\frac{16}{e^2}$ .
- Calcoliamo  $f''(x) = \frac{4}{x}[(\log x)(\log^2 x + 6 \log x + 6)]$ .  
Risulta  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = +\infty$ ,
- $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [e^{-3-\sqrt{3}}, e^{-3+\sqrt{3}}] \cup [1, +\infty)$ .  
Abbiamo quindi i seguenti tre punti di flesso:  $e^{-3-\sqrt{3}}, e^{-3+\sqrt{3}}, 1$ .



**Esercizio 3.** [7 punti] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

$$\int_0^{+\infty} \frac{(e^{-\frac{1}{2}x} + e^{-x}) \sinh^\alpha x}{x^{2\alpha}(A + e^{-x})} dx.$$

Calcolarlo per  $\alpha = 0$ .

[ $A = 5, 4, 3, 2$ ]

Svolgimento: (i) Per  $x \rightarrow 0$  la funzione integranda si comporta come  $\frac{2}{A}x^{-\alpha}$ , quindi l'integrale converge nell'intervallo  $(0, 1)$  se e solo se  $\alpha < 1$ .

Per  $x \rightarrow +\infty$  la funzione integranda si comporta come  $\frac{e^{(\alpha-\frac{1}{2})x}}{Ax^{2\alpha}}$ , quindi l'integrale converge nell'intervallo  $(1, +\infty)$  se  $\alpha < \frac{1}{2}$  e diverge se  $\alpha > \frac{1}{2}$ . Se  $\alpha = \frac{1}{2}$ , l'integranda si comporta al  $+\infty$  come  $\frac{1}{Ax}$  e l'integrale diverge in  $(1, +\infty)$ .

Perciò l'integrale converge in  $\mathbb{R}^+$  se e solo se  $\alpha < \frac{1}{2}$ .

(ii)  $\alpha = 0$ : ponendo  $y = e^{-\frac{1}{2}x}$  si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x} + e^{-x}}{A + e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{2 + 2y}{A + y^2} dy = \frac{2}{\sqrt{A}} \arctan(1/\sqrt{A}) + \log\left(\frac{A+1}{A}\right).$$

**Esercizio 4. [5 punti]** Risolvere la seguente equazione in  $\mathbb{C}$ :

$$z^6 + (7 - i)z^3 - 8 - 8i = 0 \quad \left[ z^6 - (7 - i)z^3 - 8 - 8i = 0, \quad z^6 \pm (9 + i)z^3 + 8 + 8i = 0 \right].$$

Svolgimento: Sostituiamo  $\zeta = z^3$  e consideriamo l'equazione di secondo grado

$$(1) \quad \zeta^2 + (7 - i)\zeta - 8 - 8i = 0.$$

Il discriminante di tale equazione è

$$(7 - i)^2 + 4(8 + 8i) = 49 - 14i + i^2 + 32 + 32i = 81 + 18i + i^2 = (9 + i)^2.$$

(Si noti che nei quattro compiti il discriminante è sempre un quadrato della forma  $a^2 - 1 + 2ai = (a + i)^2$  con  $a$  intero.) Pertanto le radici di (1) sono  $\zeta = -8 (= 8e^{i\pi})$  e  $\zeta = 1 + i (= \sqrt{2}e^{i\pi/4})$ . Si conclude trovando le radici terze di questi due numeri complessi. Ovvero, le sei soluzioni sono:

$$-2, \quad 2e^{i\pi/3}, \quad 2e^{i5\pi/3}, \quad 2^{1/6}e^{i\pi/12}, \quad 2^{1/6}e^{i3\pi/4}, \quad 2^{1/6}e^{i17\pi/12}.$$

Le varianti si risolvono in maniera analoga, basterà notare che (1) è sempre della forma  $(\zeta \pm 8)(\zeta \pm (1 + i))$ .

**Esercizio 5. [5 punti]** Calcolare lo sviluppo di Taylor dell' ordine  $n = 5$  con centro  $x_0 = 0$  per la seguente funzione:

$$f(x) = \frac{a}{\cos(ax)} \quad \left[ f(x) = \frac{a^2}{\cos(ax)} \right].$$

$$[a = (\sqrt{2}, \sqrt{3})]$$

Svolgimento: Si ha:

$$\cos(ax) = 1 - \frac{a^2}{2}x^2 + \frac{a^4}{24}x^4 + o(x^5) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Ponendo  $y = \frac{a^2}{2}x^2 - \frac{a^4}{24}x^4 + o(x^5) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow 0$  si ha che, per  $x \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos(ax)} &= \frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + o(y^3) \\ &= 1 + \frac{a^2}{2}x^2 - \frac{a^4}{24}x^4 + o(x^5) + \left(\frac{a^2}{2}x^2 - \frac{a^4}{24}x^4 + o(x^5)\right)^2 + \left(\frac{a^2}{2}x^2 - \frac{a^4}{24}x^4 + o(x^5)\right)^3 \\ &\quad + o\left(\left(\frac{a^2}{2}x^2 - \frac{a^4}{24}x^4 + o(x^5)\right)^3\right) \\ &= 1 + \frac{a^2}{2}x^2 - \frac{a^4}{24}x^4 + \frac{a^4}{4}x^4 + o(x^5) = 1 + \frac{a^2}{2}x^2 + \frac{5}{24}a^4x^4 + o(x^5). \end{aligned}$$

Infine, per  $x \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{a}{\cos(ax)} &= a + \frac{a^3}{2}x^2 + \frac{5}{24}a^5x^4 + o(x^5), \\ \frac{a^2}{\cos(ax)} &= a^2 + \frac{a^4}{2}x^2 + \frac{5}{24}a^6x^4 + o(x^5). \end{aligned}$$