Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta gennaio 2022 – II turno

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	
Prova orale:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\cos x - ax)^x - \sqrt{1-2ax^2+x^3}}{b\arctan x - \sin(bx)}.$$

$[(a,b) = (2,3), (-2,-3), (3,2), (-3,-2)]$

Soluzione. In base agli sviluppi

$$\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + o(t^4), \quad \sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^4) \quad \text{per } t\to 0,$$

per il denominatore si ha

$$b\arctan x - \sin(bx) = b\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right) - \left(bx - \frac{(bx)^3}{6} + o(x^4)\right) = -\frac{1}{3}\left(b - \frac{b^3}{2}\right)x^3 + o(x^4).$$

(Per $b = \pm 3, \pm 2$, il coefficiente $\left(b - \frac{b^3}{2}\right) \neq 0$.) Inoltre usando gli sviluppi

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3), \quad \log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2), \quad e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad \text{per } t\to 0,$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
(\cos x - ax)^x &= e^{x\log(\cos x - ax)} = e^{x\log\left(1-ax-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)} = e^{x\left[-ax-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\left(-ax-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)^2+o(x^2)\right]} \\
&= e^{-\left(ax^2+\frac{1}{2}(1+a^2)x^3+o(x^3)\right)} \\
&= 1 - ax^2 - \frac{1}{2}(1+a^2)x^3 + o(x^3),
\end{aligned}$$

mentre grazie allo sviluppo

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2)$$

si ha

$$\sqrt{1-(2ax^2-x^3)} = 1 - \frac{1}{2}(2ax^2-x^3) - \frac{1}{8}(2ax^2-x^3)^2 + o(x^4) = 1 - ax^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3).$$

Pertanto il limite richiesto vale

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-ax^2-\frac{1}{2}(1+a^2)x^3 - 1 + ax^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)}{-\frac{1}{3}\left(b-\frac{b^3}{2}\right)x^3 + o(x^4)} = 3\frac{2+a^2}{2b-b^3} = \begin{cases} -\frac{6}{7}, & (a,b) = (2,3), \\ \frac{6}{7}, & (a,b) = (-2,-3), \\ -\frac{33}{4}, & (a,b) = (3,2), \\ \frac{33}{4}, & (a,b) = (-3,-2). \end{cases}$$

Esercizio 2. **[8 punti]** Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = |x-a|\, e^{\frac{1}{x-b}}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$[(a, b) = (-2, -1), (1, 2), (2, 3), (3, 4)]$

Soluzione. In tutti i casi $b = a + 1$ e dunque la funzione da studiare è

$$f(x) = |x-a|e^{\frac{1}{x-a-1}} = g(x-a), \qquad g(x) := |x|e^{\frac{1}{x-1}},$$

il cui grafico è quello di g traslato a destra di $a \in \mathbb{R}$. Studiamo quindi il grafico di g. Il dominio è $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, e chiaramente $g(x) \geq 0$ per ogni $x \in D$. Essendo poi

$$\lim_{x\to 1^-} |x|e^{\frac{1}{x-1}} = 0, \qquad \lim_{x\to 1^+} |x|e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty,$$

la retta $x = 1$ è un asintoto verticale destro per g, mentre avendosi, per $x \to \pm\infty$,

$$\begin{aligned} |x|e^{\frac{1}{x-1}} &= |x|\left(1 + \frac{1}{x-1} + o\left(\frac{1}{x-1}\right)\right) = \pm x\left(1 + \frac{1}{x}(1+o(1)) + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \pm x\left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \pm x \pm 1 + o(1), \end{aligned}$$

si vede che le rette $y = \pm x \pm 1$ sono asintoti obliqui per $x \to \pm\infty$. Per quanto riguarda lo studio della derivata si ha, per $x \neq 1$,

$$\frac{d}{dx} x e^{\frac{1}{x-1}} = \left(1 - \frac{1}{(x-1)^2}\right)e^{\frac{1}{x-1}} = \frac{x^2-3x+1}{(x-1)^2}e^{\frac{1}{x-1}},$$

e dunque

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+1}{(x-1)^2}e^{\frac{1}{x-1}}, & \text{se } x > 0,\ x \neq 1, \\ -\frac{x^2-3x+1}{(x-1)^2}e^{\frac{1}{x-1}}, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

In particolare essendo g continua in un intorno di $x = 0$, dal teorema di Lagrange segue

$$\lim_{h\to 0^\pm} \frac{g(h)-g(0)}{h} = \lim_{x\to 0^\pm} g'(x) = \lim_{x\to 0^\pm} \pm\frac{x^2-3x+1}{(x-1)^2}e^{\frac{1}{x-1}} = \pm\frac{1}{e},$$

e dunque g non è derivabile in $x = 0$, e $x = 0$ è un punto angoloso. Essendo poi

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2},$$

e $0 < \frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1 < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, si vede che g è decrescente in $(-\infty, 0)$, crescente in $(0, \frac{3-\sqrt{5}}{2})$, decrescente in $(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1)$ e in $(1, \frac{3+\sqrt{5}}{2})$, e crescente in $(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$. Pertanto $x = 0$ e $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ sono punti di minimo relativo, mentre $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ è un punto di massimo relativo, ed essendo $g(0) = 0 \leq g(x)$ per ogni $x \in D$, $x = 0$ è anche un punto di minimo assoluto, mentre $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ non è un punto di massimo assoluto poiché come visto $\sup_D g = +\infty$. Inoltre

$$g\left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}e^{\frac{1}{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}-1}} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}e^{\frac{2}{1\pm\sqrt{5}}} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}e^{-\frac{1}{2}(1\mp\sqrt{5})} \gtrless \frac{3\pm\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{5\pm\sqrt{5}}{2},$$

in quanto essendo $e > (1+\frac{1}{2})^2 = 9/4$ e $2 < \sqrt{5}$, si ha

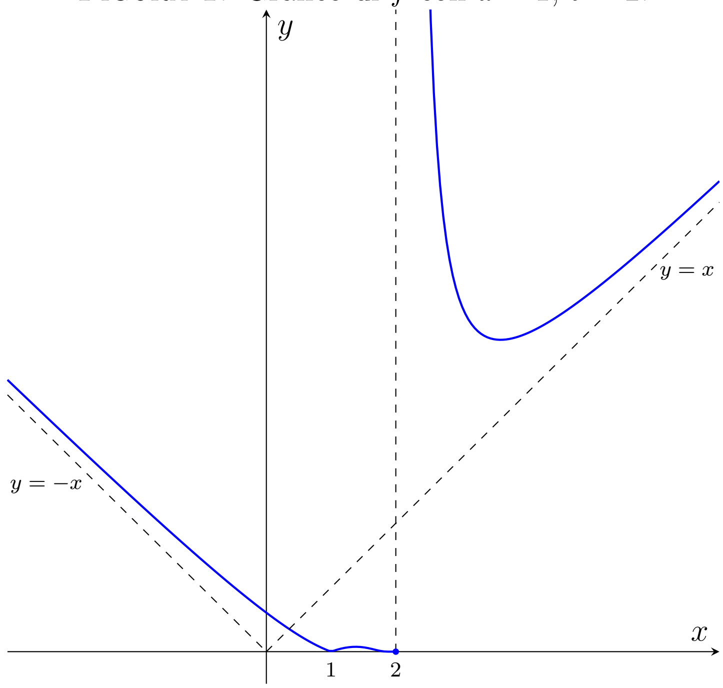
$$e^{-\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})} = e^{\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)} > e^{\frac{1}{2}} > \frac{3}{2} > \frac{1}{2}(5-\sqrt{5}) = \frac{5+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}},$$

e chiaramente

$$e^{-\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})} < 1 < \frac{1}{2}(5+\sqrt{5}) = \frac{5-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}},$$

dunque il punto di massimo relativo $(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, g(\frac{3-\sqrt{5}}{2}))$ si trova sotto l'asintoto obliquo di equazione $y = x+1$, mentre quello di minimo relativo ma non assoluto $(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, g(\frac{3+\sqrt{5}}{2}))$ si trova sopra di esso. Infine poiché $\lim_{x\to 1^-} g'(x) = 0$, il grafico di g è tangente (a sinistra) all'asse x in $x = 1$. Il grafico di f per $a = 1$ e $b = 2$, che si ottiene traslando a destra di 1 quello di g, è mostrato in fig. 1.

Figura 1. Grafico di f con $a = 1$, $b = 2$.



Esercizio 3. **[7 punti]** Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{\sqrt{2}}{a}} \frac{\arcsin(a^2x^2-1)}{(ax-1)^\alpha} \big|\sin(\pi a x)\big|^{\frac{\alpha}{2}} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 0$.

$[a = 5, 4, 3, 2]$

Soluzione. La funzione integranda è continua nell'intervallo $(\frac{1}{a}, \frac{\sqrt{2}}{a}]$, ma potenzialmente illimitata per $x \to \frac{1}{a}$, che è l'unico punto in cui si annullano $ax-1$ e $\sin(\pi a x)$. Avendosi allora $\arcsin t \sim t$ per $t \to 0$ e $\sin t = -\sin(t-\pi) \sim -(t-\pi)$ per $t \to \pi$, si vede che l'andamento asintotico per $x \to \frac{1}{a}$ della funzione integranda è

$$\frac{\arcsin(a^2x^2-1)}{(ax-1)^\alpha} \big|\sin(\pi a x)\big|^{\frac{\alpha}{2}} \sim \frac{a^2x^2-1}{(ax-1)^\alpha} |\pi(ax-1)|^{\alpha/2} \sim \frac{2\pi}{(ax-1)^{\alpha/2-1}}$$

e pertanto l'integrale considerato converge se e solo se $\alpha/2 - 1 < 1$, cioè $\alpha < 4$.
Per $\alpha = 0$ la primitiva della funzione integranda è, integrando per parti,

$$\begin{aligned}
\int \arcsin(a^2x^2-1)\, dx &= x\arcsin(a^2x^2-1) - \int \frac{2a^2x^2}{\sqrt{2a^2x^2 - a^4x^4}}\, dx \\
&= x\arcsin(a^2x^2-1) - 2a\int \frac{x}{\sqrt{2-a^2x^2}}\, dx = [t = 2 - a^2x^2] \\
&= x\arcsin(a^2x^2-1) + \frac{1}{a}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} \\
&= x\arcsin(a^2x^2-1) + \frac{2}{a}\sqrt{t} + c \\
&= x\arcsin(a^2x^2-1) + \frac{2}{a}\sqrt{2-a^2x^2} + c,
\end{aligned}$$

e pertanto l'integrale dato, che per $\alpha = 0$ non è improprio, vale

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{\sqrt{2}}{a}} \arcsin(a^2x^2-1)\, dx &= \left[x\arcsin(a^2x^2-1) + \frac{2}{a}\sqrt{2-a^2x^2}\right]_{\frac{1}{a}}^{\frac{\sqrt{2}}{a}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{a}\arcsin 1 - \frac{2}{a} = \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} - 2\right).
\end{aligned}$$

Esercizio 4. **[5 punti]** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{e^{x-y-a}}{e^x - 2} \\ y(0) = a \end{cases}.$$

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Soluzione. Osserviamo che l'equazione è definita per $x \neq \log 2$. Poiché allora la condizione iniziale è imposta in $x = 0$, la soluzione sarà definita al massimo per $x < \log 2$. Separando le variabili si ha allora

$$e^y = \int e^y dy = \int \frac{e^{x-a}}{e^x - 2} dx = e^{-a} \int \frac{dt}{t-2} = e^{-a} \log |t-2| + c = e^{-a} \log(2 - e^x) + c,$$

e imponendo la condizione iniziale si trova $c = e^a$. La soluzione cercata è quindi

$$y = \log \left(e^{-a} \log(2 - e^x) + e^a \right),$$

ed è definita per

$$e^{-a} \log(2 - e^x) + e^a > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < \log(2 - e^{-e^{2a}}) < \log 2.$$

Esercizio 5 [5 punti] Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$:

$$(z \pm 2\mathrm{i})^3 + 8\mathrm{i} = 0 \qquad \left[(z \pm \mathrm{i})^3 + 27\mathrm{i} = 0\right].$$

Soluzione. Si ha

$$(z \pm 2i)^3 + 8i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z \pm 2i)^3 = -8i = 8e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad z \pm 2i = 2e^{i(-\frac{\pi}{6}+\frac{2k}{3}\pi)}, \quad k = 0, 1, 2,$$

da cui

$$z = 2(e^{i(-\frac{\pi}{6}+\frac{2k}{3}\pi)} - i) = \begin{cases} \sqrt{3} - 3i, & k = 0, \\ 0, & k = 1, \\ -\sqrt{3} - 3i, & k = 2, \end{cases} \qquad z = 2(e^{i(-\frac{\pi}{6}+\frac{2k}{3}\pi)} + i) = \begin{cases} \sqrt{3} + i, & k = 0, \\ 4i, & k = 1, \\ -\sqrt{3} + i, & k = 2. \end{cases}$$

Analogamente

$$(z \pm \mathrm{i})^3 + 27\mathrm{i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z \pm i = 3e^{i(-\frac{\pi}{6}+\frac{2k}{3}\pi)}, \quad k = 0, 1, 2,$$

da cui

$$z = 3e^{i(-\frac{\pi}{6}+\frac{2k}{3}\pi)} - i = \begin{cases} \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}i, & k = 0, \\ 2i, & k = 1, \\ -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}i, & k = 2, \end{cases} \qquad z = 3e^{i(-\frac{\pi}{6}+\frac{2k}{3}\pi)} + i = \begin{cases} \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, & k = 0, \\ 4i, & k = 1, \\ -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, & k = 2. \end{cases}$$