Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta online del 01/09/2020

Esercizio 1. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(1+x)^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1 - \sqrt{x}}{bx - ce^{-\frac{1}{x}}}.$$

$[(b,c) = (2,3), (1,4), (2,1), (3,1)]$

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y \to 0$:

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2), \quad e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2).$$

Per $x \to 0^+$ si ha:

$$\begin{aligned}(1+x)^{\frac{1}{\sqrt{x}}} &= e^{\frac{1}{\sqrt{x}}\log(1+x)} = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2))} = e^{\sqrt{x} - \frac{x\sqrt{x}}{2} + o(x\sqrt{x})} = e^{\sqrt{x} + o(x)} \\ &= 1 + \sqrt{x} + \frac{1}{2}\Big(\sqrt{x} + o(x)\Big)^2 + o(x) \\ &= 1 + \sqrt{x} + \frac{x}{2} + o(x)\end{aligned}$$

da cui segue

$$(1+x)^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1 - \sqrt{x} = \frac{1}{2}x + o(x) \quad \text{per } x \to 0^+.$$

D'altra parte

$$bx - ce^{-\frac{1}{x}} = bx + o(x) \quad \text{per } x \to 0^+.$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{2b}.$$

Cognome (in `STAMPATELLO`): .... Nome (in `STAMPATELLO`):..

Esercizio 2. Determinare gli intervalli di monotonia della seguente funzione:

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{x - a\sqrt{|x|}}\right).$$

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento: Dominio:

$$\{x \in \mathbb{R} \,|\, x - 2\sqrt{|x|} \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0, a^2\}.$$

Per $x > 0$ e $x \neq a^2$: $f'(x) = -e^{(x-a\sqrt{x})^{-1}}(x - a\sqrt{x})^{-2}(1 - \frac{a}{2\sqrt{x}})$, pertanto f è crescente per $0 \leq x \leq \frac{a^2}{4}$ e f è decrescente per $\frac{a^2}{4} \leq x < a^2$ e per $x > a^2$.

Per $x < 0$: $f'(x) = -e^{(x-a\sqrt{-x})^{-1}}(x - a\sqrt{-x})^{-2}(1 + \frac{a}{2\sqrt{-x}})$, pertanto f è decrescente per $x \leq 0$.

$\boxed{x = \frac{a^2}{4} \text{ punto di massimo relativo, } f(\frac{a^2}{4}) = e^{-\frac{4}{a^2}}.}$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. Determinare le primitive della funzione:

$$f(x) = \frac{a + x\log x}{x^3}$$

e calcolare il seguente integrale improprio:

$$\int_1^{+\infty} \frac{a + x\log x}{x^3} dx.$$

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento: Integrando per parti:

$$\int \frac{a + x\log x}{x^3} dx = -\frac{a}{2x^2} + \int \frac{\log x}{x^2} dx = -\frac{a}{2x^2} + \int \log x \Big(-\frac{1}{x} \Big)' dx$$
$$= -\frac{a}{2x^2} - \frac{\log x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{a}{2x^2} - \frac{\log x}{x} - \frac{1}{x} + c.$$

Pertanto

$$\int_1^{+\infty} \frac{a + x\log x}{x^3} dx = \lim_{x\to+\infty} \Big(-\frac{a}{2x^2} - \frac{\log x}{x} - \frac{1}{x} \Big) + \frac{a}{2} + 1$$
$$= \frac{a}{2} + 1.$$