Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria

Canale SE-Z – Prof.ssa Teresa D'Aprile

Analisi Matematica I – Prova scritta del 15/09/2017

Cognome (in `STAMPATELLO`): ..... Nome (in `STAMPATELLO`):.....

Esercizio 1. **[5 punti]** Calcolare lo sviluppo di McLaurin dell'ordine $n = 4$ per la seguente funzione:

$$\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}.$$

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + o(y^2), \qquad \sin y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^4), \qquad \cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + o(y^5).$$

Poiché $\sin x \sim x$ per $x \to 0$, si ha

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\sin^2 x} &= 1 + \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{8}\sin^2 x + o(\sin^2 x) = 1 + \frac{1}{2}\Big(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\Big)^2 - \frac{1}{8}\Big(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\Big)^4 \\ &= 1 + \frac{1}{2}\Big(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\Big) - \frac{1}{8}\Big(x^4 + o(x^4)\Big) = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{7}{24}x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\cos x\sqrt{1+\sin^2 x} &= \Big(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\Big)\Big(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{7}{24}x^4 + o(x^4)\Big) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{7}{24}x^4 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) = 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4).\end{aligned}$$

Cognome (in STAMPATELLO): ..... Nome (in STAMPATELLO):.....

Esercizio 2. **[6 punti]** Calcolare, se esistono, i limiti per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$ della funzione

$$f(x) = \frac{\cos x}{\arctan(\frac{1}{x^3})} \log\Big(1 + \frac{1}{x^3}\Big)\Big(1 - \sqrt{1 - 2^{-\frac{1}{x}}}\Big).$$

Svolgimento: Poiché $\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} + o(y)$ per $y \to 0^+$, si ha

$$1 - \sqrt{1 - 2^{-\frac{1}{x}}} = 1 - \Big(1 - \frac{1}{2}2^{-\frac{1}{x}} + o(2^{-\frac{1}{x}})\Big) = 2^{-\frac{1}{x}-1}(1 + o(1)) \text{ per } x \to 0^+.$$

Inoltre $\log(1 + \frac{1}{x^3}) \sim \log \frac{1}{x^3}$ per $x \to 0^+$. Pertanto risulta

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} + o(1)}(-3\log x)2^{-\frac{1}{x}-1}(1 + o(1)) = 0$$

dove si è usato il limite notevole $\lim_{x\to 0} a^{-\frac{1}{x}} \log x = 0$ per ogni $a > 1$.
Poiché $\log(1 + \frac{1}{x^3}) \sim \frac{1}{x^3}$ e $\arctan \frac{1}{x^3} \sim \frac{1}{x^3}$ per $x \to +\infty$, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{\frac{1}{x^3}(1 + o(1))} \frac{1}{x^3}(1 + o(1)) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x(1 + o(1))}{1 + o(1)}.$$

Si conclude che il limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ non esiste.

Cognome (in STAMPATELLO): ..... Nome (in STAMPATELLO):.....

Esercizio 3. **[8 punti]** Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \arcsin \frac{|x-1|}{1+|x|}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, intervalli di concavità/convessità, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità, eventuali flessi.

Svolgimento: Dominio: $\{x \mid -1 \le \frac{|x-1|}{1+|x|} \le 1\} = \mathbb{R}$. Risulta

$$f(x) \ge 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Per $x < 0$: $f(x) = \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2}$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

$\boxed{y = \frac{\pi}{2} \text{ asintoto a } +\infty.}$

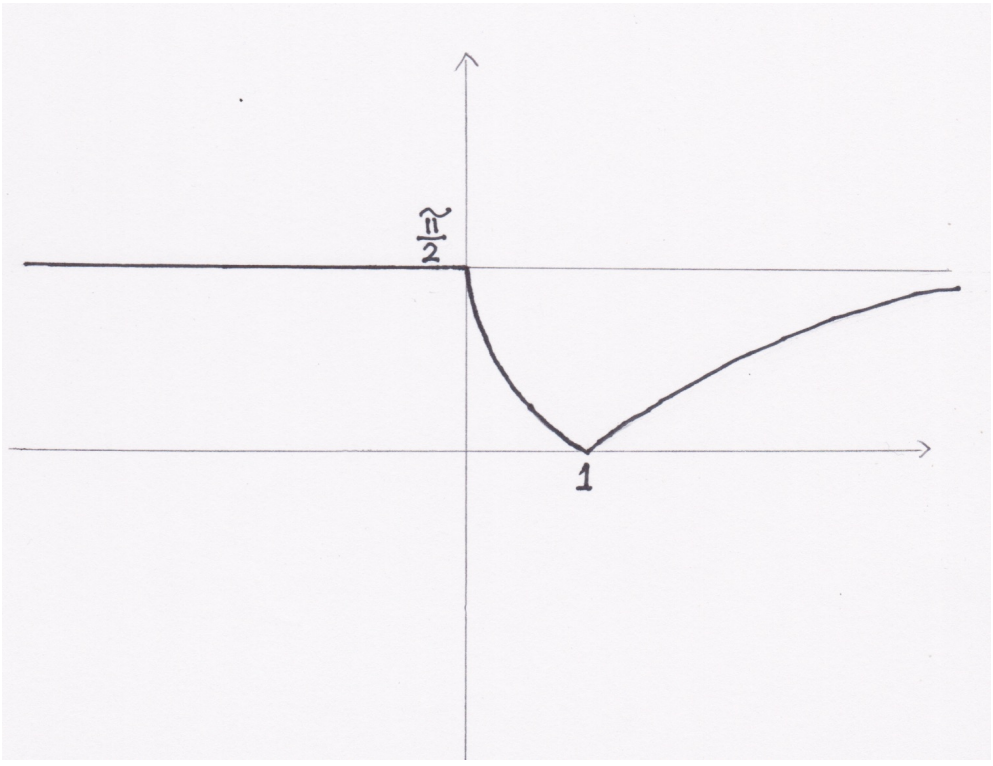
Per $0 < x < 1$: $f'(x) = -\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$, pertanto f è decrescente. Inoltre $f'_-(1) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.
Per $x > 1$: $f'(x) = \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$, pertanto f è crescente. $f'_+(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.
Inoltre

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty.$$

$\boxed{x = 0 \text{ punto di cuspide di massimo relativo.}}$

$\boxed{x = 1 \text{ punto angoloso di minimo relativo.}}$

Per $0 < x < 1$: $f''(x) = \frac{3x+1}{2x(1+x)^2\sqrt{x}}$, pertanto f è convessa.
Per $x > 1$: $f''(x) = -\frac{3x+1}{2x(1+x)^2\sqrt{x}}$, pertanto f è concava.



Cognome (in STAMPATELLO): ..... Nome (in STAMPATELLO):.....

Esercizio 4. **[6 punti]** Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale improprio esiste finito:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^\alpha}dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 1$.

Svolgimento: Si ha $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$ e $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$ per $x \to 0$, pertanto

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = x + o(x) \text{ per } x \to 0.$$

Risulta $f \sim \frac{1}{x^{\alpha-1}}$ per $x \to 0$, quindi f è integrabile su $(0,1)$ per $\alpha < 2$.
Calcoliamo l'integrale per $\alpha = 1$:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}dx.$$

Calcoliamo i due integrali generali usando la sostituzione $\sqrt{1+x} = t$ e $\sqrt{1-x} = t$ nel primo e nel secondo integrale, rispettivamente:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}dx &= \int \frac{2t^2}{t^2-1}dt = 2t + 2\int \frac{1}{t^2-1}dt = 2t + \int \frac{1}{t-1}dt - \int \frac{1}{t+1}dt \\ &= 2t + \log\frac{|t-1|}{|t+1|} + c = 2\sqrt{1+x} + \log\frac{|\sqrt{1+x}-1|}{|\sqrt{1+x}+1|} + c, \\ \int \frac{\sqrt{1-x}}{x}dx &= \int \frac{2t^2}{t^2-1}dt = 2t + \log\frac{|t-1|}{|t+1|} + c = 2\sqrt{1-x} + \log\frac{|\sqrt{1-x}-1|}{|\sqrt{1-x}+1|} + c.\end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}dx &= \lim_{c\to 0^+}\left(\int_c^1 \frac{\sqrt{1+x}}{x}dx - \int_c^1 \frac{\sqrt{1-x}}{x}dx\right) \\ &= \lim_{c\to 0^+}\left(2\sqrt{2} + \log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} - \log\frac{\sqrt{1+c}-1}{\sqrt{1+c}+1} + \log\frac{1-\sqrt{1-c}}{\sqrt{1-c}+1}\right) \\ &= 2\sqrt{2} + \log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + \lim_{c\to 0^+}\log\frac{(1-\sqrt{1-c})(\sqrt{1+c}+1)}{(\sqrt{1-c}+1)(\sqrt{1+c}-1)} \\ &= 2\sqrt{2} + \log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + \lim_{c\to 0^+}\log\frac{\frac{1}{2}c+o(c)}{\frac{1}{2}c+o(c)}\Big) \\ &= 2\sqrt{2} + \log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}.\end{aligned}$$

Cognome (in STAMPATELLO): ..... Nome (in STAMPATELLO):.....

Esercizio 5. **[5 punti]** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = 3e^{2x} \\ y(1) = -3 \\ y'(1) = 2 \end{cases}.$$

Svolgimento: Lequazione differenziale è lineare del secondo ordine non omogenea. Dato che le soluzioni dell'equazione caratteristica $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ sono $\lambda = 1, 3$, la soluzione generica dell'equazione omogenea associata

$$y'' - 4y' + 3 = 0$$

è

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Dal momento che 2 non è soluzione dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$\bar{y}(x) = ae^{2x},$$

per cui, sostituendo nell'equazione,

$$-ae^{2x} = 3e^{2x},$$

da cui otteniamo $a = -3$. Pertanto la soluzione generale dell'equazione è

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{3x} - 3e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Le condizioni iniziali danno il sistema

$$\begin{cases} c_1 e + c_2 e^3 - 3e^2 = -3 \\ c_1 e + 3c_2 e^3 - 6e^2 = 2 \end{cases}$$

ovvero $c_1 = \frac{3e^2-11}{2e}$, $c_2 = \frac{3e^2+5}{2e^3}$. Si conclude che la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{3e^2 - 11}{2e} e^x + \frac{3e^2 + 5}{2e^3} e^{3x} + 3e^{2x}.$$