

Cognome (in STAMPATELLO): Nome (in STAMPATELLO):.....

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\arctan(x + x^2) - e^x + \cos x)^2}{(x - \sin x)\sqrt{x^6 + x^8 \log^2 x}}.$$

Svolgimento: Usiamo i seguenti sviluppi di Taylor per $y \rightarrow 0$:

$$\arctan y = y - \frac{y^3}{3} + o(y^4), \quad e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3), \quad \cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + o(y^3).$$

Poiché $(x + x^2) \sim x$ per $x \rightarrow 0$, si ha:

$$\arctan(x + x^2) = x + x^2 - \frac{(x + x^2)^3}{3} + o(x^4) = x + x^2 - \frac{x^3}{3} - x^4 + o(x^4),$$

da cui

$$(\arctan(x + x^2) - e^x + \cos x)^2 = \left(x + x^2 - \frac{x^3}{3} - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)\right)^2 = \frac{1}{4}x^6 + o(x^6)$$

D'altra parte, essendo

$$x - \sin x = \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad x^8 \log^2 x = o(x^7)$$

si ha

$$(x - \sin x)\sqrt{x^6 + x^8 \log^2 x} = \left(\frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\sqrt{x^6 + o(x^6)} = \left(\frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)(x^3 + o(x^3)) = \frac{x^6}{6} + o(x^6).$$

Si conclude che il limite vale

$$\frac{3}{2}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): Nome (in STAMPATELLO):.....

Esercizio 2. [6 punti] Risolvere la seguente equazione nel campo complesso e scrivere le soluzioni in forma cartesiana:

$$(1+i)^2((z+i)^2-i) - 6 = 0.$$

Svolgimento: Usiamo la sostituzione $w = z + i$. L'equazione diventa

$$(1+i)^2(w^2-i) - 6 = 0$$

che con conti elementari si trasforma in

$$w^2 = -2i.$$

Le soluzioni w_1, w_2 sono le radici quadrate di $-2i = 2e^{-\frac{\pi}{2}}$, ovvero

$$w_1 = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}} = 1 - i, \quad w_2 = -w_1 = i - 1.$$

Pertanto, essendo $z = w - i$, le soluzioni dell'equazione di partenza sono date da

$$z_1 = w_1 - i = 1 - 2i, \quad z_2 = w_2 - i = -1.$$

Cognome (in STAMPATELLO): Nome (in STAMPATELLO):

Esercizio 3. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|x-2|}{x-1}\right)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, intervalli di concavità/convessità, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità, eventuali flessi.

Svolgimento: Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x > 1, \quad f(x) \leq 0 \quad \forall x < 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{4}.$$

$x = \frac{\pi}{4}$ asintoto orizzontale a $+\infty$, $x = -\frac{\pi}{4}$ asintoto orizzontale a $-\infty$.

La funzione è derivabile per $x \neq 1, 2$.

Per $x < 1$ e $1 < x < 2$: $f'(x) = -\frac{1}{2x^2-6x+5}$, pertanto f è decrescente. Inoltre $f'_-(2) = -1$.

Per $x > 2$: $f'(x) = \frac{1}{2x^2-6x+5}$, pertanto f è crescente. Inoltre $f'_+(2) = 1$.

$x = 2$ punto angoloso di minimo relativo.

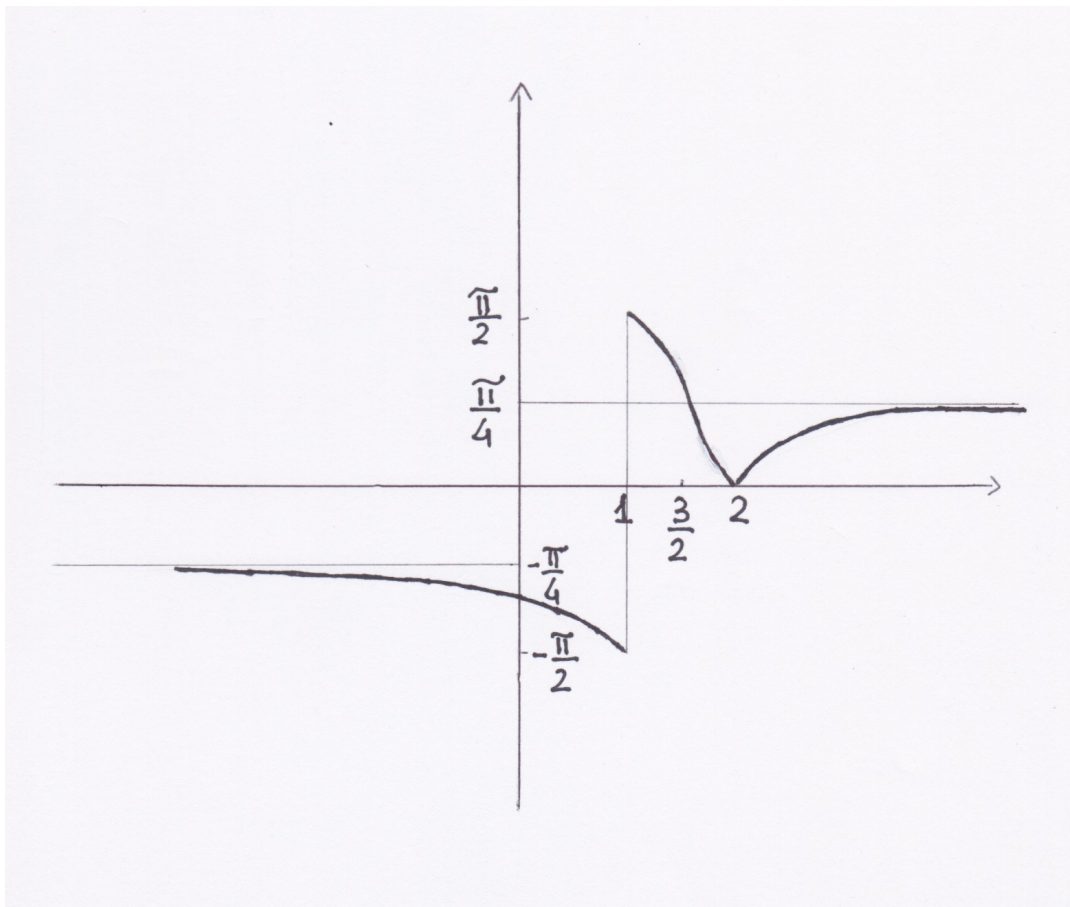
Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 1.$$

Per $x < 1$ e $1 < x < 2$: $f''(x) = \frac{4x-6}{(2x^2-6x+5)^2}$, pertanto $f''(x) \geq 0$ per $\frac{3}{2} \leq x < 2$.

Per $x > 2$: $f''(x) = -\frac{4x-6}{(2x^2-6x+5)^2}$, pertanto $f''(x) \leq 0$ per ogni $x > 2$.

f è concava per $x < 1$ e $1 < x \leq \frac{3}{2}$, f è convessa per $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$, f è concava per $x \geq 2$.



Cognome (in STAMPATELLO): Nome (in STAMPATELLO):.....

Esercizio 4. [5 punti] Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale improprio esiste finito:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^\alpha + x}} e^{-\sqrt{x}} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 1$.

Svolgimento: Poiché $f(x) \geq 0$ e $f(x) = o(e^{-\sqrt{x}})$ per $x \rightarrow +\infty$, f risulta integrabile su $(1, +\infty)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Se $\alpha > 1$, risulta $f \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ per $x \rightarrow 0^+$, pertanto f è integrabile su $(0, 1)$.

Se $\alpha = 1$, risulta $f \sim \frac{1}{\sqrt{2x}}$ per $x \rightarrow 0^+$, pertanto f è integrabile su $(0, 1)$.

Se $0 \leq \alpha < 1$, risulta $f \sim \frac{1}{x^{\alpha/2}}$ per $x \rightarrow 0^+$, pertanto f è integrabile su $(0, 1)$.

Se $\alpha < 0$, risulta $f = o(1)$ per $x \rightarrow 0^+$, pertanto f è integrabile su $(0, 1)$.

In conclusione f è integrabile su $(0, +\infty)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Calcoliamo l'integrale per $\alpha = 1$:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} dx = -\sqrt{2} e^{-\sqrt{x}} \Big|_0^{+\infty} = \sqrt{2}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): Nome (in STAMPATELLO):.....

Esercizio 5. [6 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{y^2 x \log(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento: L'equazione differenziale è a variabili separabili:

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{x \log(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Risolviamo per parti il secondo integrale:

$$\begin{aligned} \int \frac{x \log(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \int \left(\sqrt{1+x^2} \right)' \log(1+x^2) dx = \sqrt{1+x^2} \log(1+x^2) - \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x^2} 2x dx \\ &= \sqrt{1+x^2} \log(1+x^2) - \int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{1+x^2} \log(1+x^2) - 2\sqrt{1+x^2} + c. \end{aligned}$$

Pertanto

$$-\frac{1}{y} = \sqrt{1+x^2} \log(1+x^2) - 2\sqrt{1+x^2} + c.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(1) = 1$, si ottiene la costante $c = 2\sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} \log 2$. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2} \log(1+x^2) - 2\sqrt{1+x^2} + 2\sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} \log 2}.$$