Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Canale M-O – Prof.ssa Teresa D'Aprile
Analisi Matematica I – Prova scritta del 05/09/2018

Cognome (in `STAMPATELLO`): .... Nome (in `STAMPATELLO`):...

Esame orale: appello del 05/09 ☐ appello del 17/09 ☐

Esercizio 1. [5 punti] Determinare lo sviluppo di McLauren dell'ordine $n = 4$ per la seguente funzione

$$\frac{1}{1+\log(1+x)}.$$

Svolgimento: Utilizziamo i seguenti sviluppi di Taylor per $y \to 0$:

$$\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - y^3 + y^4 + o(y^4), \qquad \log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + o(y^4).$$

Poiché $\log(1+x) \sim x$ per $x \to 0$, risulta

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1+\log(1+x)}\\
&= 1 - \log(1+x) + \log^2(1+x) - \log^3(1+x) + \log^4(1+x) + o(x^4)\\
&= 1 - \Big(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\Big) + \Big(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\Big)^2 - \Big(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\Big)^3 + \Big(x + o(x)\Big)^4 + o(x^4)\\
&= 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \Big(x^2 + \frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{2}{3}x^4\Big) - x^3\Big(1 - \frac{x}{2} + o(x)\Big)^3 + x^4(1+o(1))^4 + o(x^4)\\
&= 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \Big(x^2 + \frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{2}{3}x^4\Big) - x^3\Big(1 - \frac{3}{2}x + o(x)\Big) + x^4 + o(x^4)\\
&= 1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{3}x^3 + \frac{11}{3}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 2. **[5 punti]** Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\sqrt{2+\log n}-\sqrt{1+\log n}\right)^{\log(n!)}.$$

Svolgimento: Poiché

$$\sqrt{2+\log n}-\sqrt{1+\log n}=\frac{1}{\sqrt{2+\log n}+\sqrt{1+\log n}}\to 0$$

riscriviamo il limite nella forma

$$\left(1+\sqrt{2+\log n}-\sqrt{1+\log n}\right)^{\log(n!)}=\left[\left(1+\frac{1}{\sqrt{2+\log n}+\sqrt{1+\log n}}\right)^{\sqrt{2+\log n}+\sqrt{1+\log n}}\right]^{\frac{\log(n!)}{\sqrt{2+\log n}+\sqrt{1+\log n}}}.$$

Risulta

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{2+\log n}+\sqrt{1+\log n}}\right)^{\sqrt{2+\log n}+\sqrt{1+\log n}}\to e.$$

D'altra parte

$$\frac{\log(n!)}{\sqrt{2+\log n}+\sqrt{1+\log n}}\geq\frac{\log(n)}{\sqrt{2+\log n}+\sqrt{1+\log n}}\to+\infty.$$

Pertanto il limite vale

$$+\infty.$$

Cognome (in `STAMPATELLO`): .... Nome (in `STAMPATELLO`):..

Esercizio 3. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$\sqrt{|e^x + e^{-x} - 4|},$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Facoltativo: studiare la concavità/convessità per $x \to \pm\infty$.

Svolgimento: Dominio: $\mathbb{R}$. Essendo $f(x) = f(-x)$, f risulta pari. Pertanto è sufficiente studiarne l'andamento per $x \geq 0$.

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{e^x + e^{-x} - 4} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{e^x + e^{-x} - 4}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}\sqrt{1 + e^{-2x} - 4e^{-x}}}{x} = +\infty.$$

Si ha

$e^x+e^{-x}-4 \geq 0 \iff e^{2x}-4e^x+1 \geq 0 \iff e^x \leq 2-\sqrt{3}$ e $e^x \geq 2+\sqrt{3} \iff x \leq \log(2-\sqrt{3})$ e $x \geq \log(2+\sqrt{3})$.

Per $x > \log(2+\sqrt{3})$: $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2\sqrt{e^x+e^{-x}-4}}$, quindi f è crescente.

Per $0 \leq x < \log(2+\sqrt{3})$: $f'(x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2\sqrt{4-e^x-e^{-x}}}$, quindi f è decrescente.

$\boxed{x = \log(2+\sqrt{3}) \text{ punto di minimo locale, } x = 0 \text{ punto di massimo locale.}}$

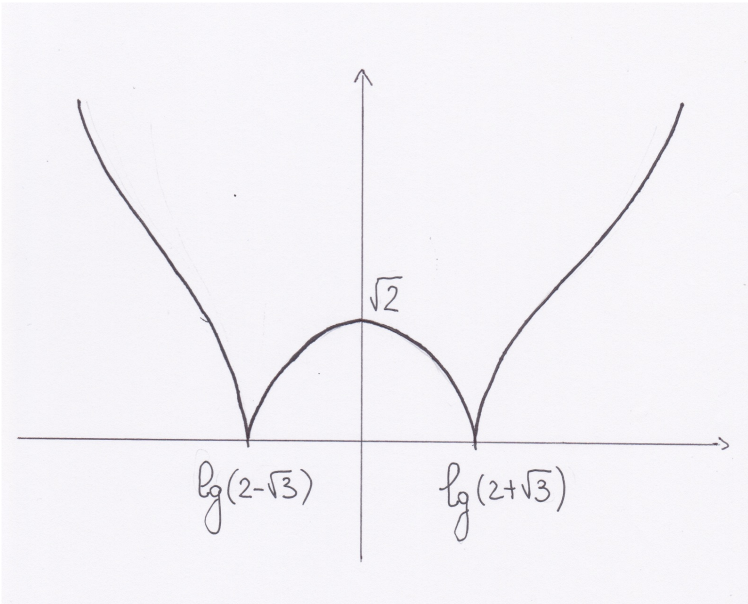
Inoltre

$$\lim_{x\to\log(2+\sqrt{3})^-} f'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to\log(2+\sqrt{3})^+} f'(x) = +\infty.$$

$\boxed{x = 2+\sqrt{3} \text{ cuspide.}}$

Per $x > \log(2+\sqrt{3})$: $f''(x) = \frac{2(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x}-4)-(e^x-e^{-x})^2}{4(e^x+e^{-x}-4)^{3/2}}$, pertanto f è convessa $\iff 2(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x}-4)-(e^x-e^{-x})^2 \geq 0 \iff e^{2x}+e^{-2x}+4-8e^x-8e^{-x}+2 \geq 0$.

$\boxed{f \text{ è convessa per } x \to +\infty.}$



Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 4. **[7 punti]** Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale improprio esiste finito:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2} \arctan(x^\alpha) dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = -1$.

Svolgimento: Poiché $0 \le f(x) \le \frac{\pi}{2}\frac{1}{(x+1)^2}$, f risulta integrabile in $(0, +\infty)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
Calcoliamo l'integrale per $\alpha = -1$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2} \arctan \frac{1}{x} dx.$$

Integrando per parti:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x+1)^2} \arctan \frac{1}{x} dx &= -\int \left(\frac{1}{x+1}\right)' \arctan \frac{1}{x} dx \\
&= -\frac{1}{x+1} \arctan \frac{1}{x} + \int \frac{1}{x+1} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx \\
&= -\frac{1}{x+1} \arctan \frac{1}{x} - \int \frac{1}{(x+1)(1+x^2)} dx \\
&= -\frac{1}{x+1} \arctan \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-x+1}{x^2+1}\right) dx \\
&= -\frac{1}{x+1} \arctan \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \log|x+1| + \frac{1}{4} \log(1+x^2) - \frac{1}{2} \arctan x + c.
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2} \arctan \frac{1}{x} dx &= \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{x+1} \arctan \frac{1}{x} + \frac{1}{4} \log \frac{1+x^2}{(1+x)^2} - \frac{1}{2} \arctan x \right) + \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 5. [5 punti] Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y'' + 2y' + 5y = \cos(2x).$$

Svolgimento: L'equazione differenziale è lineare del secondo ordine non omogenea. Dato che le soluzioni dell'equazione caratteristica $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ sono $-1 \pm 2\mathrm{i}$, la soluzione generica dell'equazione omogenea associata

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

è

$$y(x) = c_1 e^{-x}\cos(2x) + c_2 e^{-x}\sin(2x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Dal momento che $2\mathrm{i}$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$\bar{y}(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x)$$

da cui, sostituendo nell'equazione,

$$(a + 4b)\cos(2x) + (b - 4a)\sin(2x) = \cos(2x).$$

Si ottiene così $a = \frac{1}{17}$, $b = \frac{4}{17}$. Pertanto si conclude che la soluzione generale dell'equazione è

$$y(x) = c_1 e^{-x}\cos(2x) + c_2 e^{-x}\sin(2x) + \frac{1}{17}(\cos(2x) + 4\sin(2x)), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$