

Cognome (in STAMPATELLO): Nome (in STAMPATELLO):.....

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sqrt{2}x) + \sin(x^2) - 1}{2 \log(e^x - x) - x^2 \cdot \sqrt[3]{1+x}}.$$

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \cos y &= 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + o(y^5), \quad \sin y = y - \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{120} + o(y^4), \quad \log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2), \\ e^y &= 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2), \quad \sqrt[3]{1+y} = 1 + \frac{y}{3} - \frac{y^2}{9} + o(y^2). \end{aligned}$$

Si ha

$$\cos(\sqrt{2}x) - \sin(x^2) - 1 = 1 - x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^5) + x^2 - \frac{x^6}{6} + o(y^8) - 1 = \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

Poiché $e^x - 1 - x \sim \frac{x^2}{2}$ per $x \rightarrow 0$, si ricava

$$\begin{aligned} \log(e^x - x) &= \log(1 + (e^x - 1 - x)) = e^x - 1 + x - \frac{(e^x - 1 - x)^2}{2} + o(x^4) \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right)^2 + o(x^4) \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

D'altra parte

$$x^2 \cdot \sqrt[3]{1+x} = x^2 \left(1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + o(x^2) \right) = x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{9} + o(x^4)$$

Pertanto

$$2 \log(e^x - x) - x^2 \cdot \sqrt[3]{1+x} = -\frac{x^4}{18} + o(x^4).$$

Si conclude che il limite vale

$$-3.$$

Cognome (in STAMPATELLO): Nome (in STAMPATELLO):.....

Esercizio 2. [5 punti] Risolvere la seguente equazione nel campo complesso:

$$|z|^8 + z^4(1+i)^8 = 0.$$

Svolgimento: Poiché

$$(1+i)^8 = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^8 = 16e^{2\pi i} = 16,$$

l'equazione può essere così riscritta:

$$|z|^8 = -16z^4.$$

Uguagliando i moduli di ambo i membri si ha:

$$|z|^8 = 16|z|^4 \iff |z| = 0, \quad |z| = 2.$$

Si deduce che le eventuali soluzioni $z \neq 0$ sono della forma $z = 2e^{i\theta}$, da cui, sostituendo nell'equazione,

$$2^8 + 16 \cdot 2^4 e^{4i\theta} = 0$$

da cui segue

$$e^{4i\theta} = -1 = e^{i\pi}.$$

Pertanto

$$\theta = (2k+1)\frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Si conclude che le soluzioni dell'equazione sono

$$z = 0, \quad z = 2e^{i(2k+1)\frac{\pi}{4}}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ovvero

$$z = 0, \quad z = 2e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}(1+i), \quad z = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}(-1+i), \quad z = 2e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\sqrt{2}(1+i), \quad z = 2e^{i\frac{7\pi}{4}} = \sqrt{2}(1-i).$$

Cognome (in STAMPATELLO): Nome (in STAMPATELLO):

Esercizio 3. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$\exp\left(\frac{|x-1|}{x-2}\right)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, intervalli di concavità/convessità, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità, eventuali flessi.

Svolgimento: Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

$x = 2$ asintoto verticale.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{x-1}{x-2}\right) = e \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp\left(\frac{1-x}{x-2}\right) = \frac{1}{e}.$$

$y = e$ asintoto orizzontale a $+\infty$, $y = \frac{1}{e}$ asintoto orizzontale a $-\infty$.

La funzione è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.

Per $x < 1$ si ha: $f'(x) = e^{\frac{1-x}{x-2}} \frac{1}{(x-2)^2}$, pertanto f è crescente.

Per $1 < x < 2$ e $x > 2$ si ha: $f'(x) = e^{\frac{x-1}{x-2}} \frac{-1}{(x-2)^2}$, pertanto f è decrescente.

$$f'_-(1) = 1, \quad f'_+(1) = -1.$$

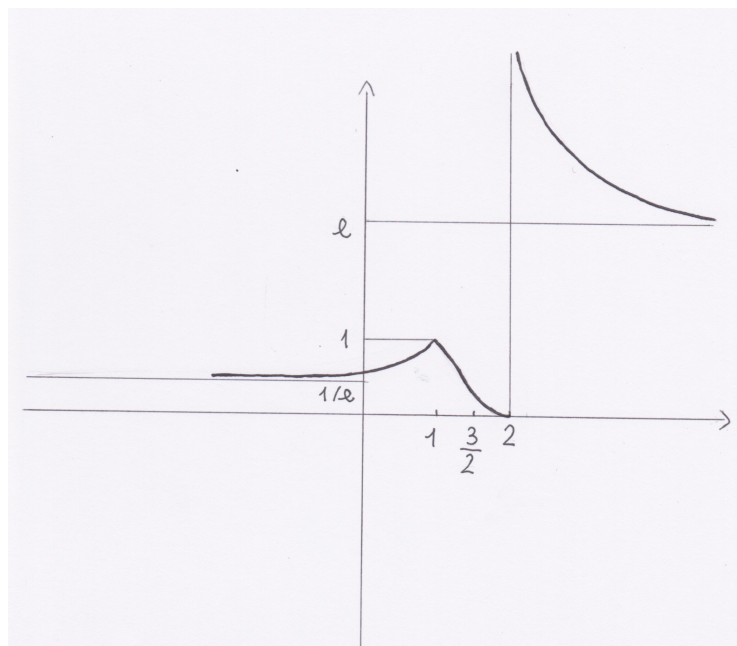
$x = 1$ punto angoloso.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} e^{\frac{x-1}{x-2}} \frac{-1}{(x-2)^2} = 0.$$

Per $x < 1$ si ha: $f''(x) = e^{\frac{1-x}{x-2}} \frac{5-2x}{(x-2)^4}$, pertanto f è convessa.

Per $1 < x < 2$ e $x > 2$ si ha: $f''(x) = e^{\frac{x-1}{x-2}} \frac{2x-3}{(x-2)^4}$, pertanto f è concava se $1 < x < \frac{3}{2}$ e f è convessa se $\frac{3}{2} < x < 2$ e $x > 2$.

$x = \frac{3}{2}$ punto di flesso.



Cognome (in STAMPATELLO): Nome (in STAMPATELLO):

Esercizio 4. [7 punti] Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale improprio esiste finito:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x)^{3\alpha}} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 1$.

Svolgimento: Poiché $f \sim \log x$ per $x \rightarrow 0^+$ e $f \sim \frac{\log x}{x^{3\alpha}}$ per $x \rightarrow +\infty$,

$$f \text{ è integrabile in } (0, +\infty) \iff 3\alpha > 1 \iff \alpha > \frac{1}{3}.$$

Calcoliamo l'integrale per $\alpha = 1$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x)^3} dx.$$

Integriamo per parti:

$$\begin{aligned} \int \frac{\log x}{(1+x)^3} dx &= \int \log x \left(-\frac{1}{2(1+x)^2} \right)' dx = -\frac{\log x}{2(1+x)^2} + \int \frac{1}{2x(1+x)^2} dx \\ &= -\frac{\log x}{2(1+x)^2} + \int \frac{1}{2x} dx - \int \frac{x+2}{2(1+x)^2} dx \\ &= -\frac{\log x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2} \log x - \frac{1}{2} \int \frac{x+1}{(1+x)^2} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(1+x)^2} dx \\ &= -\frac{\log x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2} \log x - \frac{1}{2} \log(1+x) + \frac{1}{2(1+x)} + c \end{aligned}$$

Pertanto l'integrale vale

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x)^3} dx &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\log x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2} \log x - \frac{1}{2} \log(1+x) + \frac{1}{2(1+x)} \right) \\ &\quad - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{\log x}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2} \log x - \frac{1}{2} \log(1+x) + \frac{1}{2(1+x)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \log \frac{x}{1+x} - \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \log x \left(1 - \frac{1}{(1+x)^2} \right) - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Cognome (in STAMPATELLO): Nome (in STAMPATELLO):.....

Esercizio 5. [5 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y^2 \cdot \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Svolgimento: L'equazione differenziale è a variabili separabili:

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Risolviamo il secondo integrale:

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dt + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dt = -\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + c.$$

Pertanto

$$-\frac{1}{y} = -\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + c.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 1$ si ottiene $c = 0$. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2} - \arcsin x}.$$