Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Canale SE-Z – Prof.ssa Teresa D'Aprile
Analisi Matematica I – Prova scritta del 19/07/2017

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 1. **[5 punti]** Calcolare lo sviluppo di McLaurin dell'ordine $n = 4$ per la seguente funzione:

$$\sqrt{1+2x}\,\arctan^2 x.$$

Svolgimento: Usiamo i seguenti sviluppi di Taylor per $y \to 0$:

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + o(y^2), \qquad \arctan y = y - \frac{y^3}{3} + o(y^4).$$

Si ha:

$$\sqrt{1+2x} = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \qquad (\arctan x)^2 = x^2 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4).$$

Pertanto

$$\sqrt{1+2x}\,\arctan^2 x = x^2 - \frac{2}{3}x^4 + x^3 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) = x^2 + x^3 - \frac{7}{6}x^4 + o(x^4).$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. [6 punti] Stabilire per quali valori del parametro reale α la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x\sin x)\tan x}{x^\alpha \log x} & \text{se } x \in (0,1) \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ |x|^\alpha + e^{\frac{1}{x}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

è derivabile in $(-\infty, 1)$.

<u>*Svolgimento:*</u> f è continua e derivabile in $(-\infty, 0)$ e in $(0,1)$. Poiché $\log(1+y) = y + o(y)$, $\sin y = y + o(y)$, $\tan y = y + o(y)$ per $y \to 0$, risulta

$$\log(1+x\sin x)\tan x = x^3 + o(x^3) \text{ per } x \to 0.$$

Pertanto: $\lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\tan y}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$ si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x\sin x)\tan x}{x^\alpha \log x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3(1+o(1))}{x^\alpha \log x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1+o(1)}{x^{\alpha-3}\log x} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 3 \\ 0 & \text{se } \alpha \le 3 \end{cases}.$$

D'altra parte

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left((-x)^\alpha + e^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to 0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

Pertanto f è continua in 0 se e solo se $0 < \alpha \le 3$. Passiamo ora a calcolare la derivata destra e sinistra in 0 per $0 < \alpha \le 3$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3(1+o(1))}{x^{\alpha+1}\log x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1+o(1)}{x^{\alpha-2}\log x} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 2 \\ 0 & \text{se } \alpha \le 2 \end{cases}.$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(-x)^\alpha + e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-1} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}.$$

Concludiamo che f è derivabile in 0 se e solo se $1 < \alpha \le 2$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{|\sin x|}{2 + |\cos x|}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, intervalli di concavità/convessità, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità, eventuali flessi.

Svolgimento: Dominio: $\mathbb{R}$. f è 2π-periodica. Essendo $f(x) = f(-x)$, f risulta pari. Pertanto è sufficiente studiarne l'andamento per $x \in [0, \pi]$.

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, \pi], \qquad f(0) = f(\pi) = 0.$$

Per $x \in (0, \frac{\pi}{2})$: $f'(x) = \frac{\cos x(2+\cos x)+\sin^2 x}{(2+\cos x)^2} = \frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}$, quindi f è crescente. Inoltre $f'_-(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{4}$, $f'_+(0) = \frac{1}{3}$ e, per parità, $f'_-(0) = -\frac{1}{3}$.

$\boxed{x = 0 \text{ punto angoloso di minimo relativo.}}$

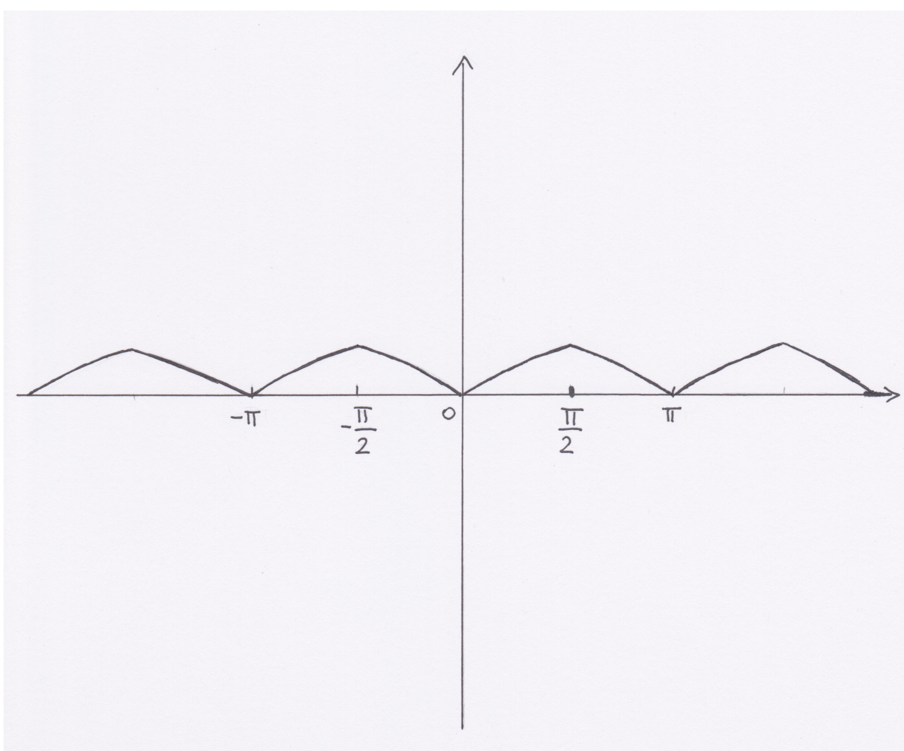
Per $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$: $f'(x) = \frac{\cos x(2-\cos x)-\sin^2 x}{(2-\cos x)^2} = \frac{2\cos x-1}{(2-\cos x)^2}$, quindi f è decrescente. Inoltre $f'_+(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{4}$, $f'_-(\pi) = -\frac{1}{4}$ e, per periodicità, $f'_-(\pi) = \frac{1}{4}$.

$\boxed{x = \frac{\pi}{2} \text{ punto angoloso di massimo relativo.}}$

$\boxed{x = \pi \text{ punto angoloso di minimo relativo.}}$

Per $x \in [0, \frac{\pi}{2})$: $f''(x) = 2\sin x \frac{\cos x-1}{(2+\cos x)^3}$, quindi f è concava.

Per $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$: $f''(x) = 2\sin x \frac{-\cos x-1}{(2-\cos x)^3}$, quindi f è concava.



Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 4. [6 punti] Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale improprio esiste finito:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^\alpha}} \sin\left(\frac{1}{1+|\log x|}\right) dx.$$

Svolgimento: Se $\alpha \leq 0$ risulta $f \sim \sin \frac{1}{1+\log x} \sim \frac{1}{\log x}$ per $x \to +\infty$, pertanto, poiché $\frac{1}{x} = o(\frac{1}{\log x})$ per $x \to +\infty$, f non è integrabile.

Analizziamo il caso $\alpha > 0$. Risulta

$$f \sim \sin \frac{1}{1+|\log x|} \sim \frac{1}{|\log x|} \text{ per } x \to 0^+.$$

Quindi, poiché $\frac{1}{|\log x|} = o(\frac{1}{x^\epsilon})$ per $x \to 0^+$ per ogni $\epsilon > 0$, f è integrabile su $(0,1)$ per ogni $\alpha > 0$.

$$f \sim \frac{1}{\sqrt{x^\alpha}} \frac{1}{1+|\log x|} \sim \frac{1}{x^{\frac{\alpha}{2}} \log x} \text{ per } x \to +\infty$$

quindi (ricordando che $\frac{1}{x^\beta \log^\gamma x}$ è integrabile in $(2,+\infty)$ se e solo se $\beta > 1$ oppure $\beta = 1$, $\gamma > 1$) si deduce che f è integrabile su $(1,+\infty)$ per $\alpha > 2$. Pertanto f è integrabile su $(0,+\infty)$ per

$$\alpha > 2.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 5. [6 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - 3x^2 y = \dfrac{e^{x^3}}{4x^2+2x+1} \\ y(0) = \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Svolgimento: L'equazione differenziale è lineare del primo ordine non omogenea della forma generale

$$y' + a(x)y = g(x).$$

Scegliamo $A(x)$ una primitiva di $a(x) = -3x^2$

$$A(x) = -x^3.$$

Calcoliamo ora le primitive di $b(x) = g(x)e^{A(x)} = \frac{1}{4x^2+2x+1}$

$$\int \frac{1}{4x^2+2x+1}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{(x+\frac{1}{4})^2+\frac{3}{16}}dx$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{\frac{3}{16}}}\arctan\frac{x+\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{3}{16}}} + c.$$

Scegliamo una primitiva $B(x)$ di $b(x)$

$$B(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{4x+1}{\sqrt{3}}.$$

Allora l'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione differenziale è dato dalla famiglia

$$ce^{x^3} + e^{x^3}\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{4x+1}{\sqrt{3}}.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$, si ottiene la costante $c = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è

$$\frac{1}{\sqrt{3}}e^{x^3}\left(\arctan\frac{4x+1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6}\right).$$