Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Canale SE-Z – Prof.ssa Teresa D'Aprile
Analisi Matematica I – Prova scritta del 04/07/2017

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esame orale: appello del 04/07 ☐ appello del 19/07 ☐

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sqrt{1+x} - \log(1+\sin x) - 2}{\arctan(x+x^2) - x}.$$

Svolgimento: Usiamo i seguenti sviluppi di Taylor per $y \to 0$:

$$\sqrt{1+y} = 1+\frac{1}{2}y-\frac{1}{8}y^2+o(y^2), \qquad \sin y = y-\frac{y^3}{3!}+o(y^4), \qquad \log(1+y) = y-\frac{y^2}{2}+o(y^2), \qquad \arctan y = y-\frac{y^3}{3}+o(y^4).$$

Poiché $\sin x \sim x$ per $x \to 0$, si ha:

$$\begin{aligned}\log(1+\sin x) &= \sin x - \frac{\sin^2 x}{2} + o(x^2) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) - \frac{1}{2}\Big(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\Big)^2 + o(x^2) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).\end{aligned}$$

Pertanto si ricava

$$2\sqrt{1+x} - \log(1+\sin x) - 2 = 2 + x - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2) - x + \frac{x^2}{2} - 2 = \frac{x^2}{4} + o(x^2).$$

D'altra parte, poiché $x + x^2 \sim x$ per $x \to 0$, si ha

$$\arctan(x+x^2) = x + x^2 - \frac{1}{3}(x+x^2)^3 + o(x^4) = x + x^2 - \frac{x^3}{3} - x^4 + o(x^4),$$

da cui si ottiene

$$\arctan(x+x^2) - x = x + x^2 - \frac{x^3}{3} - x^4 + o(x^4) - x = x^2 + o(x^2).$$

Si conclude che il limite vale

$$\frac{1}{4}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 2. [5 punti] Determinare gli eventuali punti di massimo relativo, minimo relativo o di sella per la funzione

$$f(x,y) = x(e^{x^2+y^2} - 1).$$

Svolgimento: Le derivate parziali sono date da

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (1+2x^2)e^{x^2+y^2} - 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xye^{x^2+y^2}.$$

Pertanto i punti stazionari di f corrispondono alle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} (1+2x^2)e^{x^2+y^2} - 1 = 0 \\ 2xye^{x^2+y^2} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} e^{y^2} - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} (1+2x^2)e^{x^2} - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

dove si è usata la disuguaglianza $(1+2x^2)e^{x^2} - 1 > 0$ per ogni $x \neq 0$. Pertanto $(0,0)$ è l'unico punto stazionario per f. Il determinante Hessiano si annulla nel punto $(0,0)$, quindi non da informazioni sulla natura del punto $(0,0)$. Però si verifica facilmente che

$$f(x,y) > 0 \text{ se } x > 0, \qquad f(x,y) < 0 \text{ se } x < 0,$$

Poiché la funzione cambia segno in ogni intorno del punto $(0,0)$, ne segue che $(0,0)$ è un punto di sella per f.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \log(1 + |e^x - e^{-x}|).$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, intervalli di concavità/convessità, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità, eventuali flessi.

Svolgimento: Dominio: $\mathbb{R}$. Essendo $f(x) = f(-x)$, f risulta pari. Pertanto è sufficiente studiarne l'andamento per $x \geq 0$.

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \log(1+e^x - e^{-x}) = \lim_{x\to+\infty} \log\left(e^x(1+e^{-x} - e^{-2x})\right) = \lim_{x\to+\infty} \Big(x + \log(1+e^{-x} - e^{-2x})\Big) = +\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+e^x - e^{-x})}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(e^x(1+e^{-x} - e^{-2x})\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\log(1+e^{-x} - e^{-2x})}{x}\right) = 1$$

poiché $\log(1 + e^{-x} - e^{-2x}) \sim e^{-x}$ per $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \Big(f(x) - x\Big) = \lim_{x\to+\infty} \Big(\log(1+e^x - e^{-x}) - x\Big) = \lim_{x\to+\infty} \Big(\log\left(e^x(1+e^{-x} - e^{-2x})\right) - x\Big) = \lim_{x\to+\infty} \log(1+e^{-x} - e^{-2x}) = 0$$

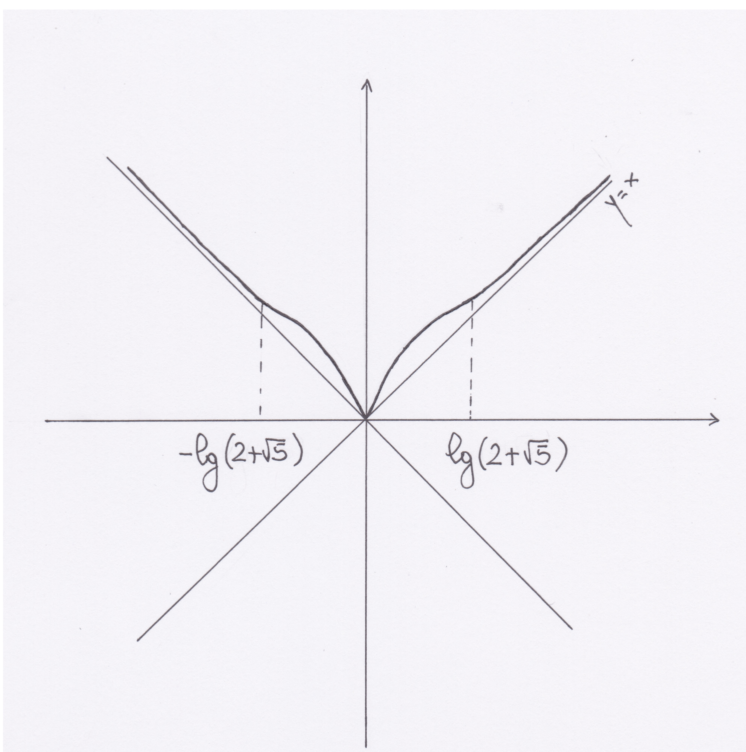
$\boxed{y = x \text{ è asintoto obliquo a } +\infty.}$

Per $x > 0$: $f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{1+e^x - e^{-x}}$, quindi f è crescente. Inoltre $f'_+(0) = 2$, e, per parità, $f'_-(0) = -2$.

$\boxed{x = 0 \text{ punto angoloso di minimo relativo.}}$

Per $x > 0$: $f''(x) \geq 0 \iff \frac{(e^x - e^{-x})(1+e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x})^2}{(1+e^x - e^{-x})^2} \geq 0 \iff e^x - e^{-x} - 4 \geq 0 \iff x \geq \log(2 + \sqrt{5})$ (qui si è usata la sostituzione $e^x = t$).

$\boxed{f \text{ è concava nell'intervallo } 0 < x < \log(2+\sqrt{5}) \text{ ed è convessa per } x \geq \log(2+\sqrt{5}).}$



Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. [6 punti] Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale improprio esiste finito:

$$\int_0^2 \frac{x^{6\alpha}}{(4-x^2)^\alpha} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

Svolgimento: $f \sim x^{6\alpha}$ per $x \to 0^+$, quindi f è integrabile su $(0,1)$ per $\alpha > -\frac{1}{6}$.
$f \sim \frac{1}{(2-x)^\alpha}$ per $x \to 2^-$, quindi f è integrabile su $(1,2)$ per $\alpha < 1$. Pertanto f è integrabile su $(0,2)$ per

$$-\frac{1}{6} < \alpha < 1.$$

Calcoliamo l'integrale per $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx.$$

Usiamo l'integrazione per parti

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx = -\int x^2 (\sqrt{4-x^2})' dx = -x^2\sqrt{4-x^2} + 2\int x\sqrt{4-x^2} dx = -x^2\sqrt{4-x^2} - \frac{2}{3}(4-x^2)^{3/2}.$$

Pertanto

$$\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx = \frac{16}{3}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 5. [6 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + 2xy = e^{-x^2}\dfrac{1-e^x}{e^{2x}+1} \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Svolgimento: L'equazione differenziale è lineare del primo ordine non omogenea della forma generale

$$y' + a(x)y = g(x).$$

Scegliamo $A(x)$ una primitiva di $a(x) = x$

$$A(x) = x^2.$$

Calcoliamo ora le primitive di $b(x) = g(x)e^{A(x)} = \frac{1-e^x}{e^{2x}+1}$ usando la sostituzione $e^x = t$:

$$\int \frac{1-e^x}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{1-t}{t^2+1}\frac{1}{t}dt = \int -\frac{1}{1+t^2}dt - \int \frac{t}{1+t^2}dt + \int \frac{1}{t}dt$$
$$= -\arctan t - \frac{1}{2}\log|1+t^2| + \log|t| + c = -\arctan e^x - \frac{1}{2}\log(1+e^{2x}) + x + c.$$

Scegliamo una primitiva $B(x)$ di $b(x)$

$$B(x) = -\arctan e^x - \frac{1}{2}\log(1+e^{2x}) + x.$$

Allora l'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione differenziale è dato dalla famiglia

$$ce^{-x^2} + e^{-x^2}\Big(-\arctan e^x - \frac{1}{2}\log(1+e^{2x}) + x\Big).$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 1$, si ottiene la costante $c = 1 + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\log 2$. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è

$$\Big(1 + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\log 2 - \arctan e^x - \frac{1}{2}\log(1+e^{2x}) + x\Big)e^{-x^2}.$$