Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Canale M-O – Prof.ssa Teresa D'Aprile
Analisi Matematica I – Prova scritta del 19/02/2018 (Compito C)

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare lo sviluppo di McLaurin dell'ordine $n = 4$ per la seguente funzione:

$$\log(\sqrt{1+x^2} + \sin x).$$

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y \to 0$:

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + o(y^4), \qquad \sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + o(y^2), \qquad \sin y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^4),$$

da cui

$$\sqrt{1+x^2} - 1 + \sin x = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{8} + o(x^4).$$

Poiché $\sqrt{1+x^2} - 1 + \sin x \sim x$ per $x \to 0$, si ha:

$$\begin{aligned}
&\log(\sqrt{1+x^2} + \sin x) = \log\big(1 + (\sqrt{1+x^2} - 1 + \sin x)\big) \\
&= \sqrt{1+x^2} - 1 + \sin x - \frac{(\sqrt{1+x^2} - 1 + \sin x)^2}{2} + \frac{(\sqrt{1+x^2} - 1 + \sin x)^3}{3} - \frac{(\sqrt{1+x^2} - 1 + \sin x)^4}{4} + o(x^4) \\
&= x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{8} - \frac{1}{2}\Big(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big)^2 + \frac{1}{3}\Big(x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\Big)^3 - \frac{1}{4}(x + o(x))^4 + o(x^4) \\
&= x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{8} - \frac{1}{2}\Big(x^2 + \frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{1}{3}x^4\Big) + \frac{1}{3}x^3\Big(1 + \frac{x}{2} + o(x)\Big)^3 - \frac{x^4}{4}(1 + o(1))^4 + o(x^4) \\
&= x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x^3\Big(1 + \frac{3}{2}x + o(x)\Big) - \frac{x^4}{4}(1 + o(1)) + o(x^4) \\
&= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n\sqrt[3]{n+n^3}-3n^2-1}{\log(n^4+4n^2)-2\log(n^2+1)}.$$

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y \to 0$:

$$\sqrt[3]{1+y} = 1 + \frac{y}{3} - \frac{y^2}{9} + o(y^2), \qquad \log(1+y) = y + o(y).$$

Risulta:

$$\begin{aligned} 3n\sqrt[3]{n+n^3}-3n^2-1 &= 3n^2\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}-3n^2-1 = 3n^2\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}-1\right)-1 \\ &= 3n^2\left(\frac{1}{3n^2}-\frac{1}{9n^4}+o\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\right)-1 = -\frac{1}{3n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big), \end{aligned}$$

$$\log(n^4+4n^2)-2\log(n^2+1) = \log\left(1+\frac{4}{n^2}\right)-2\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{2}{n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

Pertanto il limite vale

$$-\frac{1}{6}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. **[8 punti]** Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = |\log(e^x - 1)| + 4\sqrt{e^x - 1},$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Svolgimento: Dominio: $(0, +\infty)$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty.$$

$\boxed{x = 0 \text{ asintoto verticale.}}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \Big(\log(e^x - 1) + 4\sqrt{e^x - 1}\Big) = +\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(e^x - 1) + 4\sqrt{e^x - 1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4e^{x/2}(1 + o(1))}{x} = +\infty$$

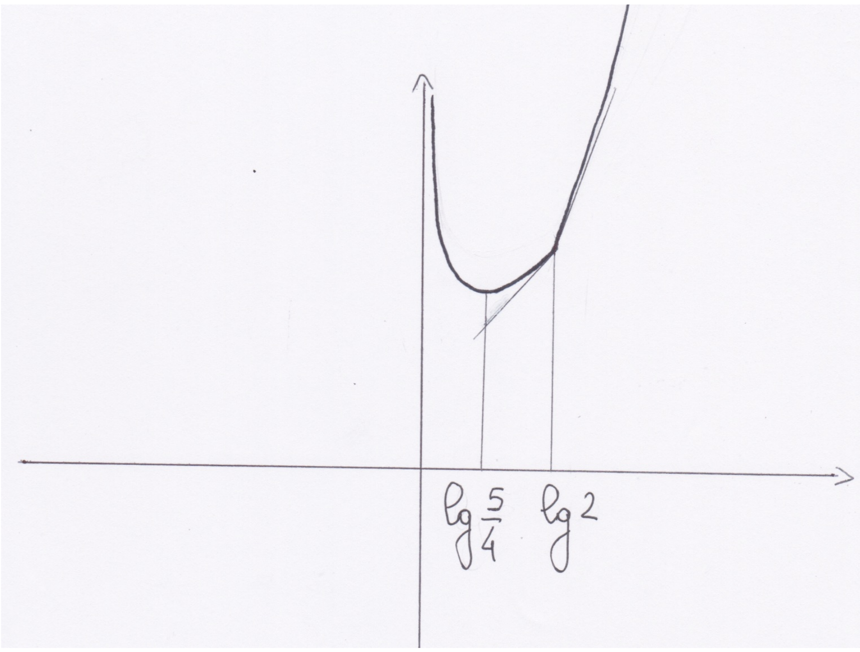
Per $x > \log 2$: $f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}\Big(\frac{1}{\sqrt{e^x-1}} + 2\Big)$, quindi f è crescente.

Per $0 < x < \log 2$: $f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}\Big(-\frac{1}{\sqrt{e^x-1}} + 2\Big)$, quindi f decrescente per $0 < x < \log\frac{5}{4}$ e f è crescente per $\log\frac{5}{4} < x < \log 2$.

$\boxed{x = \log\frac{5}{4} \text{ punto di minimo relativo.}}$

$$f'_+(\log 2) = 6 \qquad f'_-(\log 2) = 2.$$

$\boxed{x = \log 2 \text{ punto angoloso.}}$



Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. [7 punti] Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale improprio esiste finito:

$$\int_0^1 \frac{x^{4\alpha}}{(1+x^2)^\alpha}dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

Svolgimento: Risulta

$$f \sim x^{4\alpha} \text{ per } x \to 0^+,$$

pertanto f è integrabile su $(0,1)$ se e solo se $\alpha > -\frac{1}{4}$.

Calcoliamo l'integrale per $\alpha = \frac{1}{2}$. Utilizziamo la sostituzione $x = \sinh t$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int (\sinh t)^2 dt = \int \frac{e^{2t}+e^{-2t}-2}{4}dt &= \frac{e^{2t}-e^{-2t}}{8} - \frac{t}{2} + c \\
&= \frac{(x+\sqrt{1+x^2})^2}{8} - \frac{1}{8(x+\sqrt{1+x^2})^2} - \frac{\log(x+\sqrt{1+x^2})}{2} + c \\
&= \frac{(x+\sqrt{1+x^2})^2}{8} - \frac{(x-\sqrt{1+x^2})^2}{8} - \frac{\log(x+\sqrt{1+x^2})}{2} + c \\
&= \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} - \frac{\log(x+\sqrt{1+x^2})}{2} + c.
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\log(1+\sqrt{2})}{2}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 5. [5 punti] Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y'' + 2y' + y = e^{2x} - 1.$$

Svolgimento: L'equazione differenziale è lineare del secondo ordine non omogenea. Dato che l'unica soluzione dell'equazione caratteristica $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ è $\lambda = -1$, la soluzione generica dell'equazione omogenea associata sarà

$$c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Dal momento che 2 non è soluzione dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$\bar{y}(x) = a e^{2x} + b,$$

per cui, sostituendo nell'equazione,

$$9ae^{2x} + b = e^{2x} - 1,$$

da cui otteniamo

$$a = \frac{1}{9}, \quad b = -1.$$

Si conclude che la soluzione dell'equazione differenziale sono

$$c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + \frac{1}{9} e^{2x} - 1, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$