

Cognome (in STAMPATELLO): Nome (in STAMPATELLO):.....

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare lo sviluppo di McLaurin dell’ordine $n = 4$ per la seguente funzione:

$$\log(\sqrt{1+x^2} + \arctan x).$$

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y \rightarrow 0$:

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + o(y^4), \quad \sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + o(y^2), \quad \arctan y = y - \frac{y^3}{3} + o(y^4),$$

da cui

$$\sqrt{1+x^2} - 1 + \arctan x = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8} + o(x^4).$$

Poiché $\sqrt{1+x^2} - 1 + \arctan x \sim x$ per $x \rightarrow 0$, si ha

$$\begin{aligned} \log(\sqrt{1+x^2} + \arctan x) &= \log(1 + (\sqrt{1+x^2} - 1 + \arctan x)) \\ &= \sqrt{1+x^2} - 1 + \arctan x - \frac{(\sqrt{1+x^2} - 1 + \arctan x)^2}{2} + \frac{(\sqrt{1+x^2} - 1 + \arctan x)^3}{3} \\ &\quad - \frac{(\sqrt{1+x^2} - 1 + \arctan x)^4}{4} + o(x^4) \\ &= x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8} - \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^3 - \frac{1}{4}(x + o(x))^4 + o(x^4) \\ &= x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8} - \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{2}{3}x^4\right) + \frac{1}{3}x^3\left(1 + \frac{x}{2} + o(x)\right)^3 - \frac{x^4}{4}(1 + o(1))^4 + o(x^4) \\ &= x - \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x^3\left(1 + \frac{3}{2}x + o(x)\right) - \frac{x^4}{4}(1 + o(1)) + o(x^4) \\ &= x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Esercizio 2. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \log(n^3 + 3n^2) - 3n \log(1 + n)}{\sqrt[4]{n^2 + n^4} - n}.$$

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y \rightarrow 0$:

$$\sqrt[4]{1+y} = 1 + \frac{y}{4} + o(y), \quad \log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2).$$

Risulta:

$$\begin{aligned} n \log(n^3 + 3n^2) - 3n \log(1 + n) &= n \log\left(n^3\left(1 + \frac{3}{n}\right)\right) - 3n \log\left(n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \\ &= n \log\left(1 + \frac{3}{n}\right) - 3n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= n\left(\frac{3}{n} - \frac{9}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 3n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= -\frac{3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

$$\sqrt[4]{n^2 + n^4} - n = n\sqrt[4]{1 + \frac{1}{n^2}} - n = n\left(1 + \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - n = \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Pertanto il limite vale

$$-12.$$

Cognome (in STAMPATELLO): Nome (in STAMPATELLO):

Esercizio 3. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \log(e^{|x|} + 1) - \frac{2}{\sqrt{e^{|x|} + 1}}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Svolgimento: Dominio: $\mathbb{R}$. f è pari.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\log(e^x + 1) - \frac{1}{\sqrt{e^x + 1}} \right) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(e^x + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(e^x(1 + e^{-x}))}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\log(1 + e^{-x})}{x} \right) = 1$$

poiché $\log(1 + e^{-x}) \sim e^{-x}$ per $x \rightarrow +\infty$.

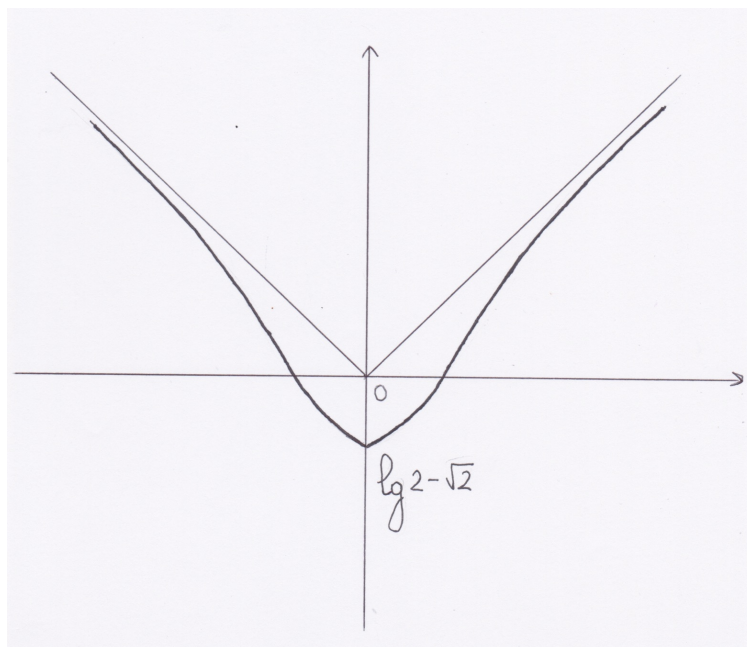
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\log(e^x + 1) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\log(e^x(1 + e^{-x})) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(1 + e^{-x}) = 0.$$

$y = x$ è asintoto obliquo a $+\infty$, $y = -x$ è asintoto obliquo a $-\infty$.

Per $x > 0$: $f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{e^x + 1}} \right)$, quindi f è crescente per $x \geq 0$.

$$f'_+(0) = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} < 1, \quad f'_-(0) = -\frac{2 + \sqrt{2}}{4} > -1.$$

$x = 0$ punto angoloso, $f(0) = \log 2 - \sqrt{2} < 0$.



Cognome (in STAMPATELLO): Nome (in STAMPATELLO):.....

Esercizio 4. [7 punti] Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale improprio esiste finito:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \cdot \sqrt{1+x^2}} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 1$.

Svolgimento: Risulta

$$f \sim \frac{1}{x^{1+\alpha}} \text{ per } x \rightarrow +\infty,$$

pertanto f è integrabile su $(1, +\infty)$ se e solo se $\alpha > 0$.

Calcoliamo l'integrale per $\alpha = 1$. Utilizziamo la sostituzione $x = \sinh t$:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sinh t} dt = \int \frac{2e^t}{e^{2t}-1} dt = \int \left(\frac{e^t}{e^t-1} - \frac{e^t}{e^t+1} \right) dt = \log \frac{e^t-1}{e^t+1} + c \\ &= \log \frac{x + \sqrt{x^2+1} - 1}{x + \sqrt{x^2+1} + 1} + c. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \log \frac{x + \sqrt{x^2+1} - 1}{x + \sqrt{x^2+1} + 1} - \log \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \log \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): Nome (in STAMPATELLO):.....

Esercizio 5. [5 punti] Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y'' + 2y' + 2y = e^{2x} - 1.$$

Svolgimento: L'equazione differenziale è lineare del secondo ordine non omogenea. Dato che le soluzioni dell'equazione caratteristica $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ sono $\lambda = -1 \pm i$, la soluzione generica dell'equazione omogenea associata sarà

$$c_1 e^{-x} \cos x + c_2 e^{-x} \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Dal momento che 2 non è soluzione dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$\bar{y}(x) = ae^{2x} + b,$$

per cui, sostituendo nell'equazione,

$$10ae^{2x} + 2b = e^{2x} - 2,$$

da cui otteniamo

$$a = \frac{1}{10}, \quad b = -\frac{1}{2}.$$

Si conclude che la soluzione dell'equazione differenziale sono

$$c_1 e^{-x} \cos x + c_2 e^{-x} \sin x + \frac{1}{10} e^{2x} - \frac{1}{2}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$