Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Canale SE-Z – Prof.ssa Teresa D'Aprile
Analisi Matematica I – Prova scritta del 22/02/2017 (Compito A)

Cognome (in `STAMPATELLO`): .... Nome (in `STAMPATELLO`):..

Esercizio 1. [5 punti] Calcolare lo sviluppo di McLaurin dell'ordine $n = 6$ per la seguente funzione:

$$\arctan(\log(1 - x^2)).$$

Svolgimento: Usiamo i seguenti sviluppi di Taylor per $y \to 0^+$:

$$\arctan y = y - \frac{y^3}{3} + o(y^4), \qquad \log(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3).$$

Poiché $\log(1 - x^2) \sim -x^2$ per $x \to 0$, si ha:

$$\arctan(\log(1 - x^2)) = \log(1 - x^2) - \frac{(\log(1 - x^2))^3}{3} + o(x^6),$$

$$\log(1 - x^2) = -x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} + o(x^6),$$

da cui

$$\begin{aligned}
\arctan(\log(1 + x^2))) &= -x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} - \frac{1}{3}\left(- x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} + o(x^6)\right)^3 + o(x^6) \\
&= -x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} + \frac{x^6}{3}\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right)^3 + o(x^6) \\
&= -x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} + \frac{x^6}{3}(1 + o(1)) + o(x^6) = -x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^6).
\end{aligned}$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 2. [5 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+e^n)-n}{3^{-n}\sin n + 2^{-n}}(n^4+\sqrt{n\log n}).$$

Svolgimento: Consideriamo i singoli fattori:

$$\log(1+e^n)-n = \log(e^n(e^{-n}+1)-n = \log(1+e^{-n}) = e^{-n}(1+o(1)),$$

$$3^{-n}\sin n + 2^{-n} = 2^{-n}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-n}\sin n + 1\right) = 2^{-n}(1+o(1)),$$

$$n^4+\sqrt{n\log n} = n^4\left(1+\sqrt{\frac{\log n}{n^7}}\right) = n^4(1+o(1)).$$

Pertanto dal limite notevole

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^\alpha}{a^n} = 0 \quad \forall a>1, \alpha>0$$

si deduce

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+e^n)-n}{3^{-n}\sin n + 2^{-n}}(n^4+\sqrt{n\log n}) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{e}{2}\right)^{-n} n^4(1+o(1)) = 0.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 3. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x \log^2 |x|},$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, intervalli di concavità/convessità, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità, eventuali flessi.

Svolgimento: Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Essendo $f(-x) = -f(x)$, f risulta dispari. Pertanto è sufficiente studiarne l'andamento per $x > 0$. Risulta $f(x) \geq 0$ per ogni $x > 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0.$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

$\boxed{\text{Non ci sono asintoti obliqui.}}$

La funzione è derivabile per $0 < x < 1$ e $x > 1$.

Per $x > 0,\, x \neq 1$: $f'(x) \geq 0 \iff \frac{1}{3}(x \log^2 x)^{-2/3}(\log^2 x + 2\log x) \geq 0 \iff \log^2 x + 2 \log x \geq 0$, quindi f è crescente per $0 < x \leq \frac{1}{e^2}$ e $x \geq 1$.

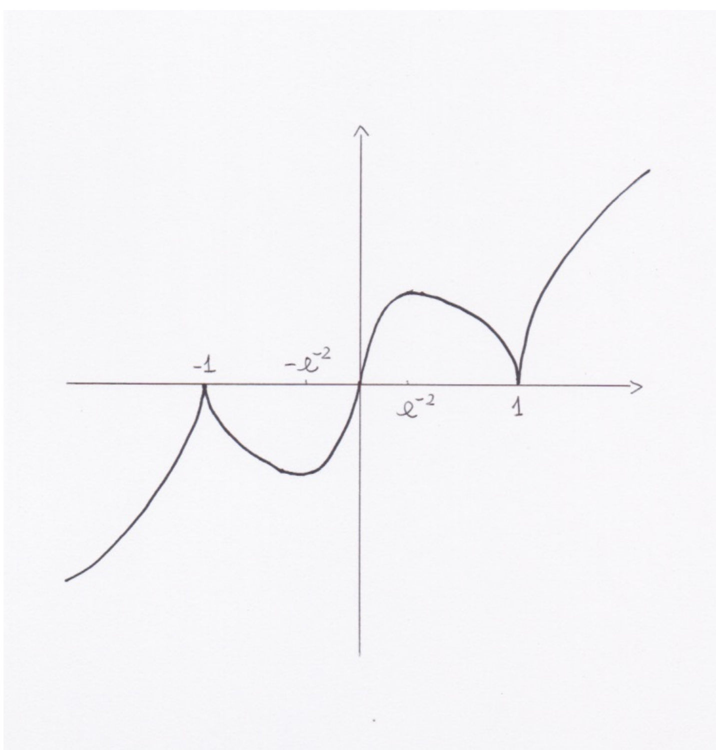
$\boxed{x = \frac{1}{e^2} \text{ punto di massimo relativo, } x = 1 \text{ punto di minimo relativo.}}$

Inoltre

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to 1^+} f'(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to 1^-} f'(x) = -\infty.$$

Per $x > 0,\, x \neq 1$: $f''(x) \geq 0 \iff -\frac{2}{9}(x \log^2 x)^{-5/3}(\log^2 x + 2\log x)^2 + \frac{1}{3}(x \log^2 x)^{-2/3}(2\frac{\log x}{x} + \frac{2}{x}) \geq 0 \iff -\frac{1}{9}(\log^2 x + 2\log x)^2 + \frac{1}{3} x \log^2 x (\frac{\log x}{x} + \frac{1}{x}) \geq 0 \iff -\log^2 x - \log x - 1 \geq 0 \iff$ mai.

$\boxed{\text{Pertanto } f \text{ è concava negli intervalli } 0 < x < 1 \text{ e } x > 1.}$



Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. [7 punti] Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale improprio esiste finito:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(x+2)}{(x^\alpha + x)^2} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 1$.

Svolgimento: Poiché $0 \leq f(x) \leq \frac{\log(x+2)}{x^2}$, ed essendo $\frac{\log(x+2)}{x^2} \sim \frac{\log x}{x^2}$ per $x \to +\infty$, per il criterio del confronto f risulta integrabile per ogni α.

Calcoliamo l'integrale per $\alpha = 1$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(x+2)}{(2x)^2} dx = \frac{1}{4} \int_1^{+\infty} \frac{\log(x+2)}{x^2} dx.$$

Integriamo per parti:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\log(x+2)}{x^2} dx &= \int \left(-\frac{1}{x}\right)' \log(x+2) dx = -\frac{1}{x} \log(x+2) + \int \frac{1}{x(x+2)} dx \\
&= -\frac{1}{x} \log(x+2) + \int \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2(x+2)}\right) dx \\
&= -\frac{1}{x} \log(x+2) + \frac{1}{2} \log|x| - \frac{1}{2} \log|x+2| + c.
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(x+2)}{(2x)^2} dx = \frac{1}{4} \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{\log(x+2)}{x} + \frac{1}{2} \log \frac{x}{x+2} \right) + \frac{3}{8} \log 3 = \frac{3}{8} \log 3.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 5. [5 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y^2 \dfrac{\log x}{x(1+\log^2 x)} \\ y(1) = 1 \end{cases}.$$

Svolgimento: L'equazione differenziale è a variabili separabili:

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int \frac{\log x}{x(1+\log^2 x)} dx$$

da cui

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2} \log |1 + \log^2 x| + c.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(1) = 1$ (e togliendo quindi i valori assoluti), si ottiene la costante $c = -1$. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(x) = \frac{1}{1 - \log \sqrt{1 + \log^2 x}}.$$