Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Canale M-O – Prof.ssa Teresa D'Aprile
Analisi Matematica I – Prova scritta del 19/02/2018 (Compito A)

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 1. **[6 punti]** Calcolare lo sviluppo di McLaurin dell'ordine $n = 4$ per la seguente funzione:

$$\log(e^{x^2} + \arctan x).$$

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y \to 0$:

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + o(y^4), \qquad e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2), \qquad \arctan y = y - \frac{y^3}{3} + o(y^4),$$

da cui

$$e^{x^2} - 1 + \arctan x = x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{2} + o(x^4).$$

Poiché $e^{x^2} - 1 + \arctan x \sim x$ per $x \to 0$, si ha

$$\begin{aligned}
&\log(e^{x^2} + \arctan x) = \log\big(1 + (e^{x^2} - 1 + \arctan x)\big) \\
&= e^{x^2} - 1 + \arctan x - \frac{(e^{x^2} - 1 - \arctan x)^2}{2} + \frac{(e^{x^2} - 1 - \arctan x)^3}{3} - \frac{(e^{x^2} - 1 - \arctan x)^4}{4} + o(x^4) \\
&= x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{2} - \frac{1}{2}\Big(x + x^2 - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\Big)^2 + \frac{1}{3}\Big(x + x^2 + o(x^2)\Big)^3 - \frac{1}{4}(x + o(x))^4 + o(x^4) \\
&= x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{2} - \frac{1}{2}\Big(x^2 + x^4 + 2x^3 - \frac{2}{3}x^4\Big) + \frac{1}{3}x^3\Big(1 + x + o(x)\Big)^3 - \frac{x^4}{4}(1 + o(1))^4 + o(x^4) \\
&= x + \frac{x^2}{2} - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{3}x^3\Big(1 + 3x + o(x)\Big) - \frac{x^4}{4}(1 + o(1)) + o(x^4) \\
&= x + \frac{x^2}{2} - x^3 + \frac{13}{12}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. **[6 punti]** Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(2n\sqrt{1+n^2}-2n^2-1\Big)\Big(n\log(e^n+n^3)+\sqrt{n}\log n\Big).$$

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y\to 0$:

$$\sqrt{1+y}=1+\frac{y}{2}-\frac{y^2}{8}+o(y^2),\qquad \log(1+y)=y+o(y).$$

Risulta:

$$\begin{aligned}2n\sqrt{1+n^2}-2n^2-1&=2n^2\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-2n^2-1=2n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1\right)-1\\&=2n^2\left(\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{8n^4}+o\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\right)-1=-\frac{1}{4n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big),\\n\log(e^n+n^3)+\sqrt{n}\log n&=n^2+\log(1+e^{-n}n^3)+\sqrt{n}\log n\\&=n^2+e^{-n}n^4+o(e^{-n}n^4)+\sqrt{n}\log n=n^2+o(n^2).\end{aligned}$$

Pertanto il limite vale

$$-\frac{1}{4}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 3. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \log|e^x - 1| + \frac{2}{\sqrt{|e^x - 1|}}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Svolgimento: Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty.$$

$\boxed{x = 0 \text{ asintoto verticale.}}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\log(e^x - 1) + \frac{2}{\sqrt{e^x - 1}}\right) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(e^x - 1)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(e^x(1 - e^{-x})\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\log(1 - e^{-x})}{x}\right) = 1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \Big(f(x) - x\Big) = \lim_{x\to+\infty} \Big(\log(e^x - 1) - x\Big) = \lim_{x\to+\infty} \Big(\log\left(e^x(1 - e^{-x})\right) - x\Big) = \lim_{x\to+\infty} \log(1 - e^{-x}) = 0.$$

$\boxed{y = x \text{ è asintoto obliquo a } +\infty.}$

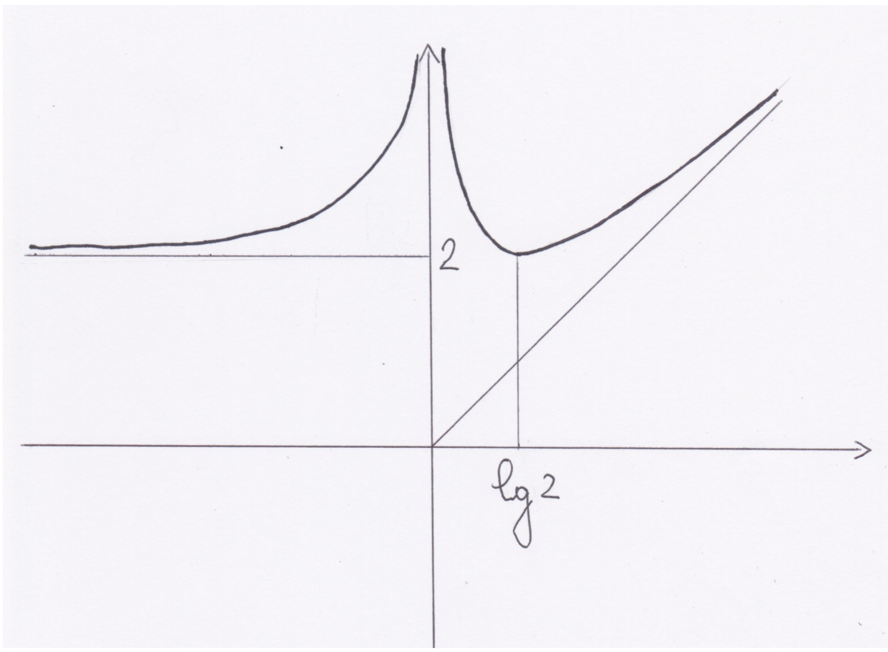
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\log(1 - e^x) + \frac{2}{\sqrt{1 - e^x}}\right) = 2.$$

$\boxed{y = 2 \text{ è asintoto orizzontale a } -\infty.}$

Per $x > 0$: $f'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}\right)$, quindi f è decrescente per $0 < x < \log 2$ e f è crescente per $x > \log 2$.

Per $x < 0$: $f'(x) = -\frac{e^x}{1 - e^x}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - e^x}}\right)$, quindi f è crescente per $x < 0$.

$\boxed{x = \log 2 \text{ punto di minimo assoluto.}}$



Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. [7 punti] Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale improprio esiste finito:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \cdot \sqrt{x^2-1}} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 1$.

Svolgimento: Risulta

$$f \sim \frac{1}{\sqrt{2(x-1)}} \text{ per } x \to 1^+.$$

D'altra parte

$$f \sim \frac{1}{x^{1+\alpha}} \text{ per } x \to +\infty.$$

Pertanto f è integrabile su $(1, +\infty)$ se e solo se $\alpha > 0$.

Calcoliamo l'integrale per $\alpha = 1$. Utilizziamo la sostituzione $x = \cosh t$:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \int \frac{1}{\cosh t} dt = \int \frac{2e^t}{1+e^{2t}} dt = 2 \arctan e^t + c = 2 \arctan(x + \sqrt{x^2-1}) + c.$$

Pertanto

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \lim_{b \to +\infty} 2 \arctan(b + \sqrt{b^2-1}) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 5. [5 punti] Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y'' + y' - 2y = e^{2x} - 2.$$

Svolgimento: L'equazione differenziale è lineare del secondo ordine non omogenea. Dato che le soluzioni dellequazione caratteristica $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ sono $\lambda = -2, 1$ la soluzione generica dell'equazione omogenea associata sarà

$$c_1 e^{-2x} + c_2 e^x, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Dal momento che 2 non è soluzione dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$\bar{y}(x) = ae^{2x} + b,$$

per cui, sostituendo nell'equazione,

$$4ae^{2x} - 2b = e^{2x} - 2,$$

da cui otteniamo

$$a = \frac{1}{4}, \;\; b = 1.$$

Si conclude che la soluzione dell'equazione differenziale sono

$$c_1 e^{-2x} + c_2 e^x + \frac{1}{4} e^{2x} + 1, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$