

Università di Roma “Tor Vergata” – Corso di Laurea in Ingegneria
Canale M-O – Prof.ssa Teresa D’Aprile
Analisi Matematica I – Prova scritta del 30/01/2018 (Compito D)

Cognome (in STAMPATELLO): Nome (in STAMPATELLO):.....

Esame orale: 9 febbraio (I appello) ☐ 23 febbraio (II appello) ☐

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sqrt{1+x^2} - \log(1+x \sin x)}{(\arctan(x+x^2) - x)^2}.$$

Svolgimento: Usiamo i seguenti sviluppi di Taylor per $y \rightarrow 0$:

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + o(y^2), \quad \sin y = y - \frac{y^3}{3!} + o(y^4), \quad \log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2), \quad \arctan y = y - \frac{y^3}{3} + o(y^4).$$

Poiché $x \sin x \sim x^2$ per $x \rightarrow 0$, si ha:

$$\begin{aligned} \log(1+x \sin x) &= x \sin x - \frac{x^2 \sin^2 x}{2} + o(x^4) = x^2 - \frac{x^4}{6} - \frac{x^2}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right)^2 + o(x^4) \\ &= x^2 - \frac{x^4}{6} - \frac{x^4}{2} + o(x^4) = x^2 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Pertanto si ricava

$$x^2 \sqrt{1+x^2} - \log(1+x \sin x) = x^2 + \frac{x^4}{2} - x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) = \frac{7}{6}x^4 + o(x^4)$$

D'altra parte, poiché $x + x^2 \sim x$ per $x \rightarrow 0$, si ha

$$\arctan(x+x^2) = x + x^2 - \frac{1}{3}(x+x^2)^3 + o(x^4) = x + x^2 + o(x^2),$$

da cui si ottiene

$$(\arctan(x+x^2) - x)^2 = (x^2 + o(x^2))^2 = x^4 + o(x^4).$$

Si conclude che il limite vale

$$\frac{7}{6}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): Nome (in STAMPATELLO):

Esercizio 2. [6 punti] Risolvere la seguente equazione nel campo complesso:

$$|z| - z^2 + i\bar{z}\operatorname{Re}(z) = 0.$$

Svolgimento: Poniamo $z = x + iy$ con x, y incognite reali, e riscriviamo l'equazione in questo modo:

$$\sqrt{x^2 + y^2} - (x^2 - y^2 + 2ixy) + i(x - iy)x = 0.$$

Poiché un numero complesso è zero se e solo se la sua parte reale e parte immaginaria sono zero, l'equazione si trasforma in un sistema di due equazioni nelle due incognite reali x, y

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - (x^2 - y^2) + xy = 0 \\ -2xy + x^2 = 0. \end{cases}$$

Risolviamo il sistema:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - (x^2 - y^2) + xy = 0 \\ x(x - 2y) = 0. \end{cases} &\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} \sqrt{5y^2} - y^2 = 0 \\ x = 2y \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} \sqrt{5}|y| - y^2 = 0 \\ x = 2y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} y = \pm\sqrt{5} \\ x = \pm 2\sqrt{5} \end{cases}. \end{aligned}$$

Pertanto le soluzioni dell'equazione sono:

$$0, \quad \sqrt{5}(2 + i), \quad -\sqrt{5}(2 + i).$$

Cognome (in STAMPATELLO): Nome (in STAMPATELLO):

Esercizio 3. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \exp\left(\sqrt{|x^2 - 1|} - x\right),$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Svolgimento: Dominio: $\mathbb{R}$. $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\left(x\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - 1\right)\right) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp\left(-x\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + 1\right)\right) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\exp\left(-x\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + 1\right)\right)}{x} = +\infty.$$

$y = 1$ asintoto a $+\infty$.

La funzione è derivabile per $x \neq \pm 1$.

Per $x < -1$ e $x > 1$ si ha $f'(x) = e^{\sqrt{x^2-1}-x} \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} - 1\right) = e^{\sqrt{x^2-1}-x} \frac{2x-2\sqrt{x^2-1}}{2\sqrt{x^2-1}}$; pertanto f è crescente per $x > 1$ e decrescente per $x < -1$.

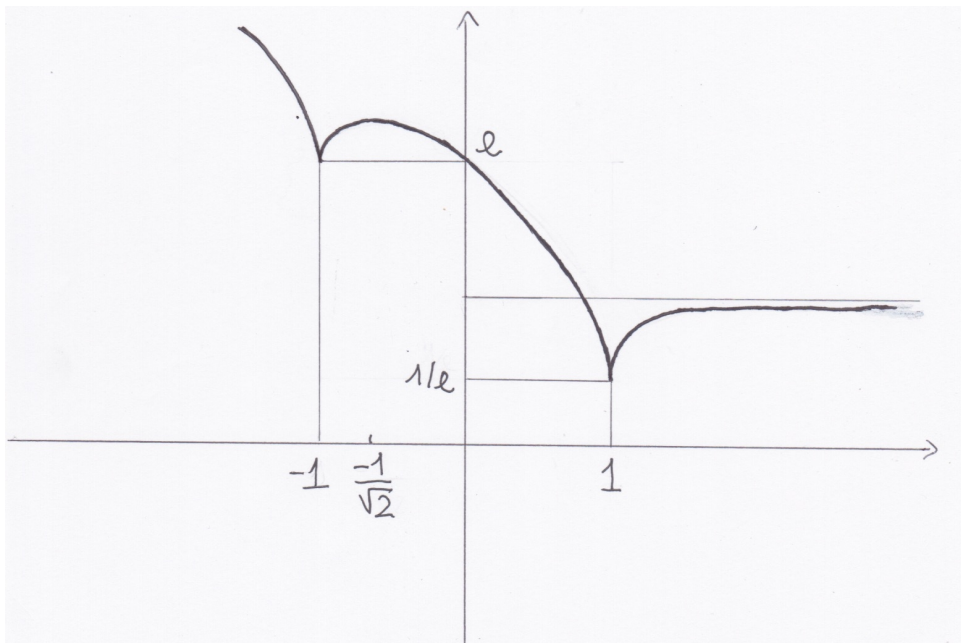
Per $-1 < x < 1$ si ha: $f'(x) = e^{\sqrt{1-x^2}-x} \left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} - 1\right) = e^{\sqrt{1-x^2}-x} \frac{-2x-2\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{1-x^2}}$; pertanto f è crescente per $-1 < x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ e decrescente per $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x < 1$.

$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ punto di massimo relativo.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = +\infty.$$

$x = -1$ e $x = 1$ punti di cuspid.



Cognome (in STAMPATELLO): Nome (in STAMPATELLO):

Esercizio 4. [7 punti] Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale improprio esiste finito:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{x}}{x^\alpha(1+x)^\alpha} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

Svolgimento: Poiché $\sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ per $x \rightarrow +\infty$, si ha

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{x} = \sqrt{x} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right) = \sqrt{x} \left(\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \text{ per } x \rightarrow +\infty.$$

Risulta

$$f \sim \frac{1}{2x^{2\alpha+\frac{1}{2}}} \text{ per } x \rightarrow +\infty, \quad f \sim \frac{1}{x^\alpha} \text{ per } x \rightarrow 0^+,$$

quindi f è integrabile su $(1, +\infty)$ se e solo se $\frac{1}{4} < \alpha < 1$.

Calcoliamo l'integrale per $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx.$$

Calcoliamo il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx - \int \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx = 2\sqrt{x} - 2\sqrt{1+x} + c,$$

da cui si deduce

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{x}}{x(1+x)} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (2\sqrt{x} - 2\sqrt{1+x}) + 2 = 2.$$

Cognome (in STAMPATELLO): Nome (in STAMPATELLO):.....

Esercizio 5. [5 punti] Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$x^2 y' + 3xy = 2 \log(1+x), \quad x > 0.$$

Svolgimento: Per $x > 0$ l'equazione diventa:

$$y' + \frac{3}{x}y = 2 \frac{\log(1+x)}{x^2}.$$

Una primitiva della funzione $a(x) = \frac{3}{x}$ è $A(x) = 3 \log|x| = 3 \log x$ (per $x > 0$). Calcoliamo il seguente integrale generale:

$$\begin{aligned} 2 \int x \log(1+x) dx &= \int (x^2)' \log(1+x) dx = x^2 \log(1+x) - \int \frac{x^2}{1+x} dx \\ &= x^2 \log(1+x) - \int \left(x - 1 + \frac{1}{1+x} \right) dx \\ &= x^2 \log(1+x) - \frac{1}{2}x^2 + x - \log(1+x) + c. \end{aligned}$$

Pertanto una primitiva della funzione $e^{A(x)} \frac{2 \log(1+x)}{x^2} = 2x \log(1+x)$ è

$$B(x) = x^2 \log(1+x) - \frac{1}{2}x^2 + x - \log(1+x).$$

Risulta

$$y(x) = ce^{-A(x)} + B(x)e^{-A(x)} = \frac{c}{x^3} + \frac{\log(1+x)}{x} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{x^2} - \frac{\log(1+x)}{x^3}, \quad c \in \mathbb{R}.$$