Università di Roma “Tor Vergata” – Corso di Laurea in Ingegneria
Canale M-O – Prof.ssa Teresa D’Aprile
Analisi Matematica I – Prova scritta del 30/01/2018 (Compito C)

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esame orale: 9 febbraio (I appello) ☐ 23 febbraio (II appello) ☐

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-\log(1+x\sin x)}{(2\sqrt{1+x+x^2}-2-x)^2}.$$

Svolgimento: Usiamo i seguenti sviluppi di Taylor per $y\to 0$:

$$\sqrt{1+y}=1+\frac{y}{2}-\frac{y^2}{8}+o(y^2),\quad \sin y=y-\frac{y^3}{3!}+o(y^4),\quad \log(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+o(y^2).$$

Si ha

$$\sin^2 x=\Big(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\Big)^2=x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^4).$$

Poiché $x\sin x\sim x^2$ per $x\to 0$, si ha:

$$\begin{aligned}\log(1+x\sin x)&=x\sin x-\frac{x^2\sin^2 x}{2}+o(x^4)=x^2-\frac{x^4}{6}-\frac{x^2}{2}\Big(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\Big)^2+o(x^4)\\&=x^2-\frac{x^4}{6}-\frac{x^4}{2}+o(x^4)=x^2-\frac{2}{3}x^4+o(x^4).\end{aligned}$$

Pertanto si ricava

$$\sin^2 x-\log(1+x\sin x)=x^2-\frac{1}{3}x^4-x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)=\frac{1}{3}x^4+o(x^4).$$

D’altra parte, poiché $x+x^2\sim x$ per $x\to 0$, si ha

$$\sqrt{1+x+x^2}=1+\frac{x+x^2}{2}-\frac{(x+x^2)^2}{8}+o(x^2)=1+\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2+o(x^2),$$

da cui si ottiene

$$(2\sqrt{1+x+x^2}-2-x)^2=\Big(\frac{3}{4}x^2+o(x^2)\Big)^2=\frac{9}{16}x^4+o(x^4).$$

Si conclude che il limite vale

$$\frac{16}{27}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. [6 punti] Risolvere la seguente equazione nel campo complesso:

$$|z| + \sqrt{5}z^2 - \sqrt{5}\,\overline{z}\,\mathrm{Im}(z) = 0.$$

Svolgimento: Poniamo $z = x + iy$ con x, y incognite reali, e riscriviamo l'equazione in questo modo:

$$\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{5}(x^2 - y^2 + 2ixy) + \sqrt{5}(-x + iy)y = 0.$$

Poiché un numero complesso è zero se e solo se la sua parte reale e parte immaginaria sono zero, l'equazione si trasforma in un sistema di due equazioni nelle due incognite reali x, y

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{5}(x^2 - y^2) - \sqrt{5}xy = 0 \\ 2xy + y^2 = 0. \end{cases}$$

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{5}(x^2 - y^2) - \sqrt{5}xy = 0 \\ y(2x + y) = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{o} \begin{cases} \sqrt{5x^2} - \sqrt{5}x^2 = 0 \\ y = -2x \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{o} \begin{cases} |x| - x^2 = 0 \\ y = -2x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{o} \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \mp 2 \end{cases}.$$

Pertanto le soluzioni dell'equazione sono:

$$0, \quad 1 - 2i, \quad -1 + 2i.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \exp\left(\sqrt{|x^2-1|} + x\right),$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Svolgimento: Dominio: $\mathbb{R}$. $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \exp\left(x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1\right)\right) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \exp\left(-x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-1\right)\right) = 1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\exp\left(x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1\right)\right)}{x} = +\infty.$$

$\boxed{y = 1 \text{ asintoto a } -\infty}$

La funzione è derivabile per $x \neq -1, 1$.

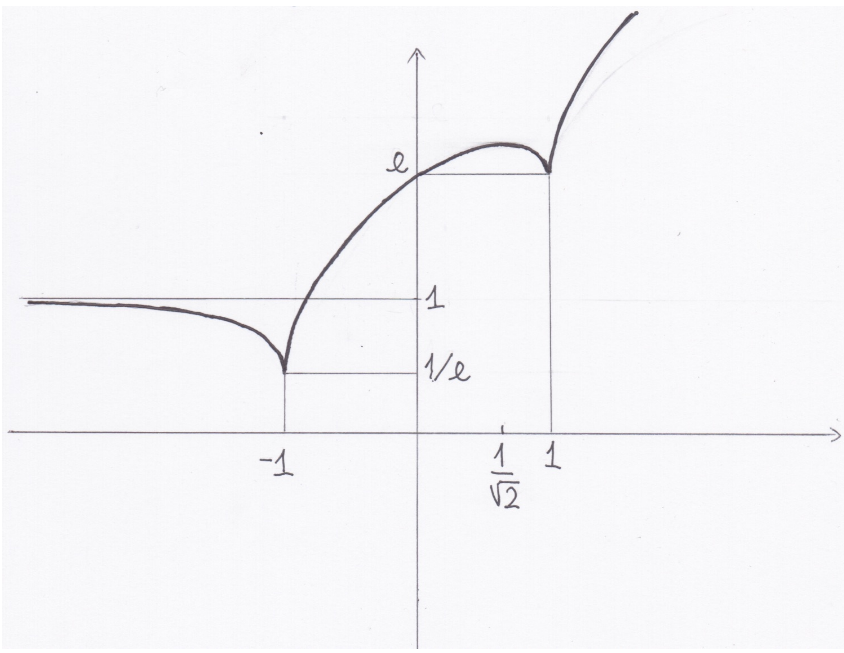
Per $x < -1$ e $x > 1$ si ha $f'(x) = e^{\sqrt{x^2-1}+x}\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}+1\right) = e^{\sqrt{x^2-1}+x}\frac{2x+2\sqrt{x^2-1}}{2\sqrt{x^2-1}}$; pertanto f è crescente per $x > 1$ e decrescente per $x < -1$.

Per $-1 < x < 1$ si ha: $f'(x) = e^{\sqrt{1-x^2}+x}\left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}+1\right) = e^{\sqrt{1-x^2}+x}\frac{-2x+2\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{1-x^2}}$; pertanto f è crescente per $-1 < x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ e decrescente per $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x < 1$.

$\boxed{x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ punto di massimo relativo.}}$

$$\lim_{x\to-1^-} f'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-1^+} f'(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to1^-} f'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to1^+} f'(x) = +\infty,$$

$\boxed{x = -1 \text{ e } x = 1 \text{ punti di cuspide di minimo relativo.}}$



Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. [7 punti] Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale improprio esiste finito:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{(1+x^2)^\alpha} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = \frac{3}{2}$.

Svolgimento: Poiché $\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1 + \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})$ per $x \to +\infty$, si ha

$$\sqrt{1+x^2}-x = x\Big(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\Big) = x\Big(\frac{1}{2x^2} + o\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big) = \frac{1}{2x} + o\Big(\frac{1}{x}\Big) \text{ per } x \to +\infty.$$

Risulta

$$f \sim \frac{1}{2x^{2\alpha+1}} \text{ per } x \to +\infty,$$

quindi f è integrabile su $(0, +\infty)$ se e solo se $\alpha > 0$.
Calcoliamo l'integrale per $\alpha = \frac{3}{2}$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{(1+x^2)^{3/2}} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{(1+x^2)^{3/2}} dx.$$

Calcoliamo il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{(1+x^2)^{3/2}} dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx - \int \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} dx = \arctan x + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + c,$$

da cui si deduce

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{(1+x^2)^{3/2}} dx = \lim_{b\to+\infty} \Big(\arctan x + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\Big) - 1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 5. [5 punti] Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$x^2y' + 5xy = 4\arctan x, \quad x > 0.$$

Svolgimento: Per $x > 0$ l'equazione diventa:

$$y' + \frac{5}{x}y = 4\frac{\arctan x}{x^2}.$$

Una primitiva della funzione $a(x) = \frac{5}{x}$ è $A(x) = 5\log|x| = 5\log x$ (per $x > 0$). Calcoliamo il seguente integrale generale:

$$4\int x^3 \arctan x dx = \int (x^4)' \arctan x dx = x^4 \arctan x - \int \frac{x^4}{1+x^2}dx$$
$$= x^4 \arctan x - \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}\right) = x^4 \arctan x - \frac{1}{3}x^3 + x - \arctan x + c.$$

Pertanto una primitiva della funzione $e^{A(x)}\frac{4\arctan x}{x^2} = 4x^3 \arctan x$ è

$$B(x) = x^4 \arctan x - \frac{1}{3}x^3 + x - \arctan x.$$

Risulta

$$y(x) = ce^{-A(x)} + B(x)e^{-A(x)} = \frac{c}{x^5} + \frac{\arctan x}{x} - \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{x^4} - \frac{\arctan x}{x^5}, \quad c \in \mathbb{R}.$$