Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Canale M-O – Prof.ssa Teresa D'Aprile
Analisi Matematica I – Prova scritta del 30/01/2018 (Compito B)

Cognome (in `STAMPATELLO`): .... Nome (in `STAMPATELLO`):...

Esame orale: 9 febbraio (I appello) ☐ 23 febbraio (II appello) ☐

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(xe^x - \log(1+x+x^2)\right)^2}{2\sqrt{1+\sin^2 x} - 2 - x^2}.$$

Svolgimento: Usiamo i seguenti sviluppi di Taylor per $y \to 0$:

$$e^y = 1+y+\frac{y^2}{2}+o(y^2), \quad \sin y = y - \frac{y^3}{3!}+o(y^4), \quad \log(1+y) = y-\frac{y^2}{2}+o(y^2), \quad \sqrt{1+y} = 1+\frac{y}{2}-\frac{y^2}{8}+o(y^2).$$

Poiché $x+x^2 \sim x$ per $x \to 0$, si ha:

$$\log(1+x+x^2) = x+x^2 - \frac{(x+x^2)^2}{2} + o(x^2) = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Pertanto si ricava

$$xe^x - \log(1+x+x^2) = x+x^2-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2) = \frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

da cui segue

$$\left(xe^x - \log(1+x+x^2)\right)^2 = \frac{x^4}{4}+o(x^4).$$

Inoltre, poiché $\sin x \sim x$ per $x \to 0$, si ha:

$$\sqrt{1+\sin^2 x} = 1+\frac{1}{2}\sin^2 x - \frac{1}{8}\sin^4 x + o(x^4) = 1+\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\right)^2 - \frac{1}{8}\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\right)^4 + o(x^4)$$
$$= 1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{6}-\frac{x^4}{8}+o(x^4) = 1+\frac{x^2}{2}-\frac{7}{24}x^4.$$

da cui si ottiene

$$2\sqrt{1+\sin^2 x} - 2 - x^2 = -\frac{7}{12}x^4 + o(x^4).$$

Si conclude che il limite vale

$$-\frac{3}{7}.$$

Cognome (in `STAMPATELLO`): .... Nome (in `STAMPATELLO`):...

Esercizio 2. [6 punti] Risolvere la seguente equazione nel campo complesso:

$$z|z| - \overline{z} + \mathrm{i}\,\mathrm{Re}(z) = 0.$$

Svolgimento: Poniamo $z = x + \mathrm{i}y$ con x, y incognite reali, e riscriviamo l'equazione in questo modo:

$$(x + \mathrm{i}y)\sqrt{x^2 + y^2} - x + \mathrm{i}y + \mathrm{i}x = 0.$$

Poiché un numero complesso è zero se e solo se la sua parte reale e parte immaginaria sono zero, l'equazione si trasforma in un sistema di due equazioni nelle due incognite reali x, y

$$\begin{cases} x\sqrt{x^2 + y^2} - x = 0 \\ y\sqrt{x^2 + y^2} + y + x = 0. \end{cases}$$

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x\sqrt{x^2 + y^2} - x = 0 \\ y\sqrt{x^2 + y^2} + y + x = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{o} \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \\ 2y + x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{o} \begin{cases} \sqrt{5}|y| = 1 \\ x = -2y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{o} \begin{cases} y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ x = \mp 2\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}.$$

Pertanto le soluzioni dell'equazione sono:

$$0, \quad \frac{1}{\sqrt{5}}(-2 + \mathrm{i}), \quad \frac{2}{\sqrt{5}}(2 - \mathrm{i}).$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \exp\Big(-\sqrt{|x^2-1|}-x\Big),$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Svolgimento: Dominio: $\mathbb{R}$. $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \exp\left(-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)\right) = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \exp\left(x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)\right) = 1.$$

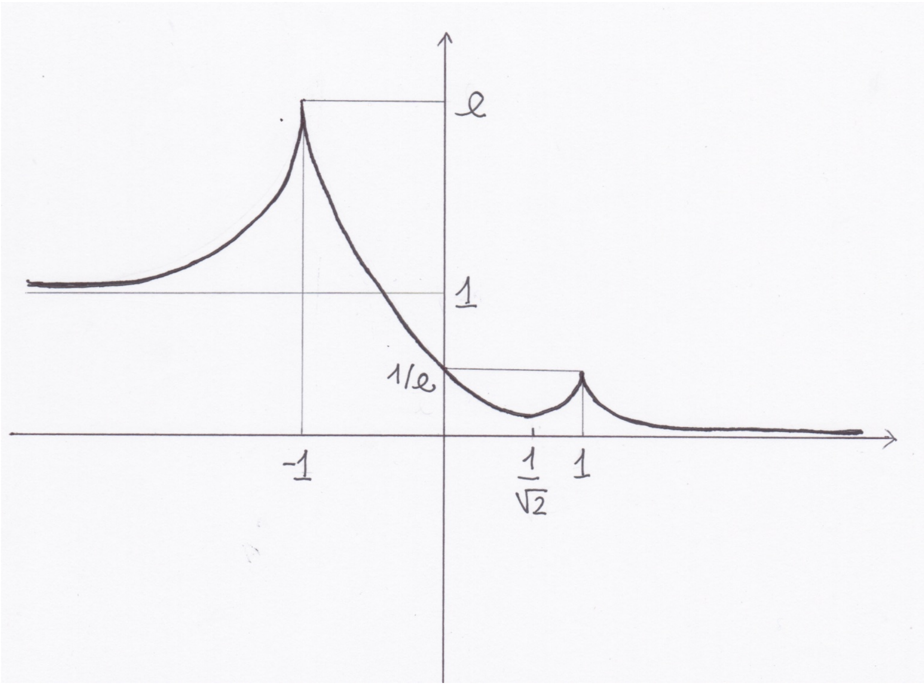
$\boxed{y = 0 \text{ asintoto a } +\infty,\ y = 1 \text{ asintoto a } -\infty.}$

La funzione è derivabile per $x \neq \pm 1$.
Per $x < -1$ e $x > 1$ si ha $f'(x) = e^{-\sqrt{x^2-1}-x}\Big(-\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}-1\Big) = e^{-\sqrt{x^2+1}-x}\frac{-2x-2\sqrt{x^2-1}}{2\sqrt{x^2+1}}$; pertanto f è crescente per $x < -1$ e decrescente per $x > 1$.
Per $-1 < x < 1$ si ha: $f'(x) = e^{-\sqrt{1-x^2}-x}\Big(\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}-1\Big) = e^{-\sqrt{1-x^2}-x}\frac{2x-2\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{1-x^2}}$; pertanto f è crescente per $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x < 1$ e decrescente per $-1 < x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\boxed{x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ punto di minimo relativo.}}$

$$\lim_{x\to-1^-} f'(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-1^+} f'(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to1^-} f'(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to1^+} f'(x) = -\infty,$$

$\boxed{x = -1 \text{ e } x = 1 \text{ punti di cuspide.}}$



Cognome (in `STAMPATELLO`): .... Nome (in `STAMPATELLO`):..

Esercizio 4. [7 punti] Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale improprio esiste finito:

$$\int_2^{+\infty} \frac{x - \sqrt{x^2-1}}{(x^2-1)^\alpha} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = \frac{3}{2}$.

<u>*Svolgimento:*</u> Poiché $\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = 1 - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})$ per $x \to +\infty$, si ha

$$x - \sqrt{x^2-1} = x\Big(1 - \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\Big) = x\Big(\frac{1}{2x^2} + o\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big) = \frac{1}{2x} + o\Big(\frac{1}{x}\Big) \text{ per } x \to +\infty.$$

Risulta

$$f \sim \frac{1}{2x^{2\alpha+1}} \text{ per } x \to +\infty,$$

quindi f è integrabile su $(0, +\infty)$ se e solo se $\alpha > 0$.
Calcoliamo l'integrale per $\alpha = \frac{3}{2}$:

$$\int_2^{+\infty} \frac{x - \sqrt{x^2-1}}{(x^2-1)^{3/2}} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_2^b \frac{x - \sqrt{x^2-1}}{(x^2-1)^{3/2}} dx.$$

Calcoliamo il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{x - \sqrt{x^2-1}}{(x^2-1)^{3/2}} dx = \int \frac{x}{(x^2-1)^{3/2}} dx - \int \frac{1}{x^2-1} dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1} + c,$$

da cui si deduce

$$\int_1^{+\infty} \frac{x - \sqrt{x^2-1}}{(x^2-1)^{3/2}} dx = \lim_{b \to +\infty} \Big(-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}\Big) + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\log 3 = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\log 3.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 5. [5 punti] Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$x^2y' + 4xy = 3\arctan x, \quad x > 0.$$

Svolgimento: Per $x > 0$ l'equazione diventa:

$$y' + \frac{4}{x}y = 3\frac{\arctan x}{x^2}.$$

Una primitiva della funzione $a(x) = \frac{4}{x}$ è $A(x) = 4\log|x| = 4\log x$ (per $x > 0$). Calcoliamo il seguente integrale generale:

$$3\int x^2 \arctan x dx = \int (x^3)' \arctan x dx = x^3 \arctan x - \int \frac{x^3}{1+x^2}dx = x^3 \arctan x - \int \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

$$= x^3 \arctan x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c$$

Pertanto una primitiva della funzione $e^{A(x)}\frac{3\arctan x}{x^2} = 3x^2 \arctan x$ è

$$B(x) = x^3 \arctan x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\log(1+x^2).$$

Risulta

$$y(x) = ce^{-A(x)} + B(x)e^{-A(x)} = \frac{c}{x^4} + \frac{\arctan x}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{\log(1+x^2)}{2x^4}, \quad c \in \mathbb{R}.$$