Università di Roma “Tor Vergata” – Corso di Laurea in Ingegneria
Canale M-O – Prof.ssa Teresa D’Aprile
Analisi Matematica I – Prova scritta del 30/01/2018 (Compito A)

Cognome (in `STAMPATELLO`): .... Nome (in `STAMPATELLO`):...

Esame orale: 9 febbraio (I appello) ☐ 23 febbraio (II appello) ☐

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\big(xe^x-\log(1+\arctan x)\big)^2}{\sin(x^2-x^4)-x\sin x}.$$

Svolgimento: Usiamo i seguenti sviluppi di Taylor per $y\to 0$:

$e^y=1+y+\frac{y^2}{2}+o(y^2)$, $\sin y=y-\frac{y^3}{3!}+o(y^4)$, $\log(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+o(y^2)$, $\arctan y=y-\frac{y^3}{3}+o(y^4)$.

Poiché $\arctan x\sim x$ per $x\to 0$, si ha:

$$\begin{aligned}\log(1+\arctan x)&=\arctan x-\frac{\arctan^2 x}{2}+o(x^2)=x-\frac{1}{2}\Big(x-\frac{x^3}{3}+o(x^4)\Big)^2+o(x^2)\\&=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2).\end{aligned}$$

Pertanto si ricava

$$xe^x-\log(1+\arctan x)=x+x^2-x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)=\frac{3}{2}x^2+o(x^2)$$

da cui segue

$$\big(xe^x-\log(1+\arctan x)\big)^2=\frac{9}{4}x^4+o(x^4)$$

D’altra parte, poiché $x^2+x^4\sim x^2$ per $x\to 0$, si ha

$$\sin(x^2-x^4)=x^2-x^4-\frac{1}{3!}(x^2-x^4)^3+o(x^8)=x^2-x^4+o(x^4),$$

da cui si ottiene

$$\sin(x^2-x^4)-x\sin x=x^2-x^4-x^2+\frac{x^4}{6}+o(x^4)=-\frac{5}{6}x^4.$$

Si conclude che il limite vale

$$-\frac{27}{10}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. [6 punti] Risolvere la seguente equazione nel campo complesso:

$$|z| - z^2 + \mathrm{i}\, z\, \mathrm{Re}(\overline{z}) = 0.$$

Svolgimento: Poniamo $z = x + \mathrm{i}y$ con x, y incognite reali, e riscriviamo l'equazione in questo modo:

$$\sqrt{x^2+y^2} - x^2 + y^2 - 2\mathrm{i}xy + \mathrm{i}(x + \mathrm{i}y)x = 0.$$

Poiché un numero complesso è zero se e solo se la sua parte reale e parte immaginaria sono zero, l'equazione si trasforma in un sistema di due equazioni nelle due incognite reali x, y

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} - x^2 + y^2 - xy = 0 \\ -2xy + x^2 = 0. \end{cases}$$

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} - x^2 + y^2 - xy = 0 \\ x(x-2y) = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{o} \begin{cases} \sqrt{5y^2} - 5y^2 = 0 \\ x = 2y \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{o} \begin{cases} |y| - \sqrt{5}y^2 = 0 \\ x = 2y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{o} \begin{cases} y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ x = \pm 2\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}.$$

Pertanto le soluzioni dell'equazione sono:

$$0, \quad \frac{1}{\sqrt{5}}(2+\mathrm{i}), \quad -\frac{1}{\sqrt{5}}(2+\mathrm{i}).$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 3. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \exp\left(x - \sqrt{|x^2 - 1|}\right),$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Svolgimento: Dominio: $\mathbb{R}$. $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \exp\left(x\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)\right) = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \exp\left(x\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)\right) = 0$$

$\boxed{y = 1 \text{ asintoto a } +\infty,\ y = 0 \text{ asintoto a } -\infty.}$

La funzione è derivabile per $x \neq \pm 1$.

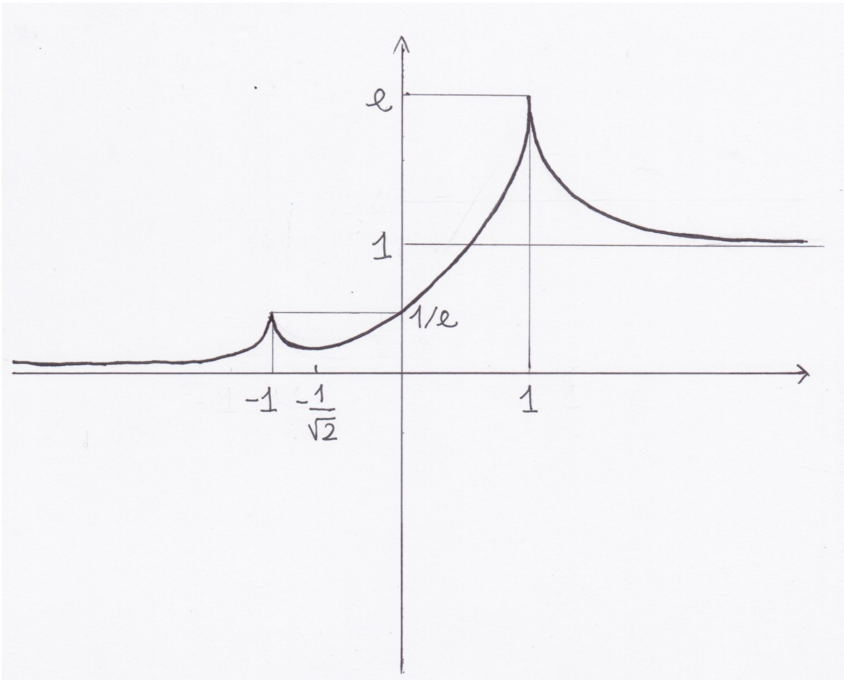
Per $x < -1$ e $x > 1$ si ha $f'(x) = e^{x-\sqrt{x^2-1}}\left(1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right) = e^{\sqrt{x^2-1}-x}\frac{2\sqrt{x^2-1}-2x}{2\sqrt{x^2-1}}$; pertanto f è crescente per $x < -1$ e decrescente per $x > 1$.

Per $-1 < x < 1$ si ha: $f'(x) = e^{x-\sqrt{1-x^2}}\left(1 - \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right) = e^{x-\sqrt{1-x^2}}\frac{2x+2\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{1-x^2}}$; pertanto f è crescente per $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x < 1$ e decrescente per $-1 < x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\boxed{x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ punto di minimo relativo.}}$

$$\lim_{x\to-1^-} f'(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-1^+} f'(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to1^-} f'(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to1^+} f'(x) = -\infty,$$

$\boxed{x = -1 \text{ e } x = 1 \text{ punti di cuspide di massimo relativo.}}$



Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. [**7 punti**] Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale improprio esiste finito:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{x^\alpha (x-1)^\alpha} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

Svolgimento: Poiché $\sqrt{1-\frac{1}{x}} = 1 - \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})$ per $x \to +\infty$, si ha

$$\sqrt{x}-\sqrt{x-1} = \sqrt{x}\Big(1-\sqrt{1-\frac{1}{x}}\Big) = \sqrt{x}\Big(\frac{1}{2x}+o\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + o\Big(\frac{1}{\sqrt{x}}\Big) \text{ per } x \to +\infty.$$

Risulta

$$f \sim \frac{1}{2x^{2\alpha+\frac{1}{2}}} \text{ per } x \to +\infty, \qquad f \sim \frac{1}{(x-1)^\alpha} \text{ per } x \to 1^-,$$

quindi f è integrabile su $(1, +\infty)$ se e solo se $\frac{1}{4} < \alpha < 1$.

Calcoliamo l'integrale per $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x(x-1)}} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x(x-1)}} dx.$$

Calcoliamo il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x(x-1)}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx - \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x-1} - 2\sqrt{x} + c,$$

da cui si deduce

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x(x-1)}} dx = \lim_{b\to+\infty} \Big(2\sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\Big) + 2 = 2.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 5. [5 punti] Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$x^2 y' + 3xy = 2\log(1+x^2), \quad x > 0.$$

<u>*Svolgimento:*</u> Per $x > 0$ l'equazione diventa:

$$y' + \frac{3}{x}y = 2\frac{\log(1+x)}{x^2}.$$

Una primitiva della funzione $a(x) = \frac{3}{x}$ è $A(x) = 3\log|x| = 3\log x$ (per $x > 0$). Calcoliamo il seguente integrale generale:

$$\begin{aligned} 2\int x\log(1+x^2)dx &= \int (x^2)'\log(1+x^2)dx = x^2\log(1+x^2) - \int \frac{2x^3}{1+x^2}dx \\ &= x^2\log(1+x^2) - 2\int\left(x - \frac{x}{1+x^2}\right) \\ &= x^2\log(1+x^2) - x^2 + \log(1+x^2) + c \end{aligned}$$

Pertanto una primitiva della funzione $e^{A(x)}\frac{2\log(1+x^2)}{x^2} = 2x\log(1+x^2)$ è

$$B(x) = x^2\log(1+x^2) - x^2 + \log(1+x^2).$$

Risulta

$$y(x) = ce^{-A(x)} + B(x)e^{-A(x)} = \frac{c}{x^3} + \frac{\log(1+x^2)}{x} - \frac{1}{x} + \frac{\log(1+x^2)}{x^3}, \quad c \in \mathbb{R}.$$