# Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
# Canale SE-Z – Prof.ssa Teresa D'Aprile
# Analisi Matematica I – Prova scritta del 07/02/2017 (Compito A)

Cognome (in STAMPATELLO): ......................................... Nome (in STAMPATELLO):.........................................

Esame orale: appello del 07/02 ☐ appello del 22/02 ☐

---

**Esercizio 1. [6 punti]** Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2+x^4) - 2e^{x^2}\cos x + 2}{x\tan x \sin^2 x + x^5 \log|x|}.$$

*Svolgimento:* Usiamo i seguenti sviluppi di Taylor per $y \to 0$:

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2), \quad e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2), \quad \cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} + o(y^5).$$

Poiché $x^2 + x^4 \sim x^2$ per $x \to 0$, si ha:

$$\log(1+x^2+x^4) = x^2 + x^4 - \frac{(x^2+x^4)^2}{2} + o(x^4) = x^2 + x^4 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) = x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4),$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4),$$

da cui

$$e^{x^2}\cos x = \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$
$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4).$$

Pertanto si ricava

$$\log(1+x^2+x^4) - 2e^{x^2}\cos x + 2 = x^2 + \frac{x^4}{2} - 2\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right) + 2 + o(x^4) = \frac{5}{12}x^4 + o(x^4).$$

D'altra parte, essendo

$$x\tan x \sin^2 x = x^4 + o(x^4), \qquad x^5 \log|x| = o(x^4),$$

si ha

$$x\tan x \sin^2 x + x^5 \log|x| = x^4 + o(x^4).$$

Si conclude che il limite vale

$$\frac{5}{12}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): ................................................. Nome (in STAMPATELLO):..............................................

---

**Esercizio 2. [5 punti]** Risolvere la seguente equazione nel campo complesso:

$$|z|\mathrm{Im}(z)+\sqrt{5}(\mathrm{i}z-2\overline{z})-4\sqrt{5}=0.$$

*Svolgimento:* Poniamo $z=x+\mathrm{i}y$, con $x,y$ incognite reali, e riscriviamo l'equazione in questo modo:

$$\sqrt{x^2+y^2}\,y+\sqrt{5}(\mathrm{i}x-y-2x+2\mathrm{i}y)-4\sqrt{5}=0.$$

Poiché un numero complesso è zero se e solo se la sua parte reale e parte immaginaria sono zero, l'equazione si trasforma in un sistema di due equazioni nelle due incognite reali $x,y$

$$\begin{cases} y\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{5}(y+2x)-4\sqrt{5}=0 \\ x+2y=0 \end{cases}.$$

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} y\sqrt{5y^2}+3\sqrt{5}y-4\sqrt{5}=0 \\ x=-2y \end{cases} \iff \begin{cases} y|y|+3y-4=0 \\ x=-2y \end{cases} \iff \begin{cases} y\geq 0 \\ y^2+3y-4=0 \\ x=-2y \end{cases} \text{ o } \begin{cases} y<0 \\ -y^2+3y-4=0 \\ x=-2y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y\geq 0 \\ y=-4,1 \\ x=-2y \end{cases} \iff \begin{cases} y=1 \\ x=-2 \end{cases}.$$

Pertanto l'unica soluzione dell'equazione è

$$-2+\mathrm{i}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): ................................................ Nome (in STAMPATELLO):................................................

**Esercizio 3. [8 punti]** Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = x \exp\left(\frac{|x-1|}{x}\right),$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

*Svolgimento:* Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0.$$

$\boxed{x = 0 \text{ asintoto verticale per } x \to 0^+.}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = e, \qquad \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - ex\big) = \lim_{x\to+\infty} ex\Big(e^{-\frac{1}{x}} - 1\Big) = -e.$$

$\boxed{y = ex - e \text{ asintoto obliquo per } x \to +\infty.}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{e}, \qquad \lim_{x\to-\infty} \Big(f(x) - \frac{x}{e}\Big) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e}\Big(e^{\frac{1}{x}} - 1\Big) = \frac{1}{e}.$$

$\boxed{y = \frac{x}{e} + \frac{1}{e} \text{ asintoto obliquo per } x \to -\infty.}$

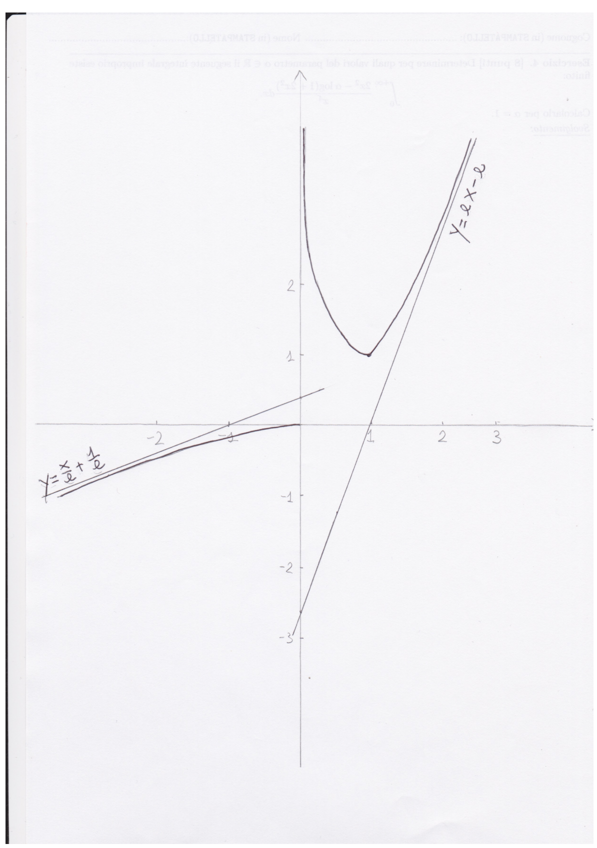
Per $x > 1$: $f'(x) \geq 0 \iff e\,e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} e\,e^{-\frac{1}{x}} \geq 0$, quindi $f$ è crescente.
Per $x < 1$, $x \neq 0$: $f'(x) \geq 0 \iff \frac{1}{e} e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{ex} e^{\frac{1}{x}} \geq 0 \iff \frac{x-1}{x} \geq 0$, quindi $f$ è crescente per $x < 0$ e decrescente per $0 < x < 1$.

Inoltre $f'_-(1) = 0$, $f'_+(1) = 2$.

$\boxed{x = 1 \text{ punto angoloso di minimo relativo.}}$

Infine

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0.$$



Cognome (in `STAMPATELLO`): ................................................. Nome (in `STAMPATELLO`):...............................................

---

**Esercizio 4. [8 punti]** Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale improprio esiste finito:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x - \arctan x}{x^\alpha} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 3$.

*Svolgimento:* $f \sim \frac{1}{x^{\alpha-3}}$ per $x \to 0^+$, e quindi $f$ è integrabile su $(0,1)$ per $\alpha < 4$. $f \sim \frac{1}{x^{\alpha-1}}$ per $x \to +\infty$ e quindi $f$ è integrabile su $(1,+\infty)$ per $\alpha > 2$. Pertanto $f$ è integrabile su $(0,+\infty)$ per

$$2 < \alpha < 4.$$

Calcoliamo l'integrale per $\alpha = 3$:

$$\int \frac{x - \arctan x}{x^3} dx = -\frac{1}{x} - \int \frac{\arctan x}{x^3} dx.$$

Calcoliamo l'ultimo integrale per parti:

$$\begin{aligned} \int \frac{\arctan x}{x^3} dx &= \int \Big( -\frac{1}{2x^2} \Big)' \arctan x dx = -\frac{1}{2x^2} \arctan x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2} \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= -\frac{1}{2x^2} \arctan x + \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= -\frac{1}{2x^2} \arctan x - \frac{1}{2x} - \frac{\arctan x}{2} + c. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\int \frac{x - \arctan x}{x^3} dx = -\frac{1}{2x} + \frac{\arctan x}{2x^2} + \frac{\arctan x}{2} + c$$

da cui si deduce

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{x - \arctan x}{x^3} dx &= \lim_{x \to +\infty} \left( -\frac{1}{2x} + \frac{\arctan x}{2x^2} + \frac{\arctan x}{2} \right) - \lim_{x \to 0^+} \left( -\frac{1}{2x} + \frac{\arctan x}{2x^2} + \frac{\arctan x}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{4} - \lim_{x \to 0^+} \frac{-x + \arctan x + x^2 \arctan x}{2x^2} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Cognome (in STAMPATELLO): .................................................. Nome (in STAMPATELLO):...............................................

**Esercizio 5. [5 punti]** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - y'\dfrac{\cos x}{\sin x} - \sin^2 x = 0 \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 \\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}.$$

*Suggerimento:* È utile la sostituzione $y' = z$.

*Svolgimento:* $z$ risolve il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} z' - z\dfrac{\cos x}{\sin x} - \sin^2 x = 0 \\ z\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}.$$

L'equazione differenziale risolta da $z$ è lineare.
Una primitiva della funzione $a(x) = -\frac{\cos x}{\sin x}$ è $A(x) = -\log|\sin x|$; però, dato che la funzione $\sin x$ è positiva nell'intervallo $(0, \pi)$, in tale intervallo $A(x) = -\log\sin x$.
Una primitiva della funzione $b(x) = e^{A(x)}\sin^2 x = \sin x$ è $B(x) = -\cos x$. Risulta:

$$z(x) = ce^{-A(x)} + B(x)e^{-A(x)} = c\sin x - \sin x\cos x.$$

Imponendo la condizione iniziale $z(\frac{\pi}{2}) = 0$ si determina la costante $c$:

$$c = 0.$$

Pertanto

$$y(x) = \int z(x)dx = \int -\sin x\cos x dx = -\frac{\sin^2 x}{2} + c',$$

da cui, imponendo la condizione iniziale $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ si ottiene

$$c' = \frac{3}{2}.$$

Perciò la soluzione è:

$$y(x) = -\frac{\sin^2 x}{2} + \frac{3}{2}.$$