Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta giugno 2022

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	
Prova orale:	

Esercizio	**Punteggio**
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\log(ax))\ e^{-\frac{1}{ax^2}} + \cos(\arctan x) - e^{-\frac{x^2}{2}}}{\log(1+ax^2) - \sin(ax^2)}.$$

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento. Considerando la velocità con cui va a zero il reciproco dell'esponenziale, al numeratore basta lo sviluppo del secondo e terzo addendo che dà:

$$\begin{aligned}
\cos(\arctan x) - e^{-\frac{x^2}{2}} &= 1 - \frac{1}{2}\Big(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\Big)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right)^4 \\
&\quad + o\big(x^4\big) - \Big(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o\big(x^4\big)\Big) \\
&= \frac{1}{4}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

Al denominatore:

$$\begin{aligned}
\log(1+ax^2) - \sin(ax^2) &= ax^2 - a^2\frac{x^4}{2} + o\left(x^4\right) - ax^2 + o\left(x^4\right) \\
&= -a^2\frac{x^4}{2} + o\left(x^4\right).
\end{aligned}$$

Quindi il limite proposto è uguale a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{4}x^4 + o(x^4)}{-a^2\frac{x^4}{2} + o\left(x^4\right)} = -\frac{1}{2a^2}.$$

Esercizio 2. **[8 punti]** Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = |x| - \log(x^2 + 2ax + a^2)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. **È richiesto lo studio della derivata seconda.**

$[a = (-2, 2, -1, 1)]$

Svolgimento. Consideriamo il caso $a = 2$.
<u>`Dominio`</u>: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
<u>`Asintoti`</u>: c'è un asintoto verticale in $x = -2$. Infatti:

$$\lim_{x \to -2^{\pm}} \Big(|x| - \ln(x^2 + 4x + 4)\Big) = +\infty;$$

Non ci sono asintoti orizzontali. Infatti:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \Big(|x| - \ln(x^2 + 4x + 4)\Big) = +\infty;$$

Non ci sono asintoti obliqui. Infatti:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{|x| - \ln(x^2 + 4x + 4)}{x} = \pm 1,$$

ma

$$\lim_{x \to +\infty} \Big(|x| - \ln(x^2 + 4x + 4) - x\Big) = \lim_{x \to +\infty} \Big(-\ln(x^2 + 4x + 4)\Big) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to -\infty} \Big(|x| - \ln(x^2 + 4x + 4) + x\Big) = \lim_{x \to -\infty} \Big(-\ln(x^2 + 4x + 4)\Big) = -\infty,$$

<u>`Derivata prima`</u>:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{x+2} = \frac{x}{x+2} & x > 0 \\ -1 - \frac{2}{x+2} = -\frac{x+4}{x+2} & x < 0 \end{cases}$$

Poiché

$$f'_+(0) = 0 \qquad f'_-(0) = -2,$$

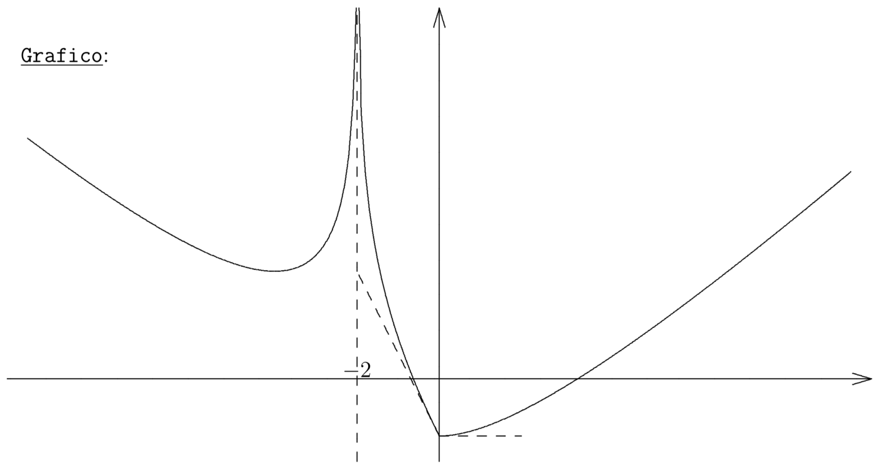
$x = 0$ è un punto angoloso.
Studiamo il segno della derivata.
Per $x > 0$: $f'(x) > 0$, quindi f crescente, per $x \in (0, +\infty)$;
Per $x < 0$: $f'(x) \leq 0$, quindi f decrescente, per $x \in (-\infty, -4] \cup (-2, 0)$; $f'(x) \geq 0$, quindi f crescente, per $x \in [-4, -2)$.
Possiamo dedurre allora che $x_m := -4$ è un punto di minimo relativo.

<u>`Derivata seconda`</u>:

$$f''(x) = \frac{2}{(x+2)^2}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\},$$

quindi $f''(x) > 0$ per ogni $x \in D(f) \setminus \{0\}$. Osserviamo che in 0 la derivata prima non è definita per cui non ha senso fare la derivata seconda di f in quel punto. Possiamo dedurre da quanto detto che la funzione è convessa negli intervalli $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$ e $(0, +\infty)$. Per dire che f è in realtà convessa in tutto $(-2, +\infty)$ possiamo osservare che $f'_-(0) = -2 < 0 = f'_+(x)$.

Grafico:



.

Esercizio 3. **[7 punti]** Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{(x^2+2)^{\frac{\alpha}{2}}(\cosh(ax))^2} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 0$.

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento. Sia f_α la funzione integranda.

`Convergenza a` $+\infty$: Poiché

$$(x^2+2)^{\alpha/2} \sim x^\alpha, \qquad (\cosh(ax))^2 \sim e^{2ax} \text{ per } x \to +\infty.$$

deduciamo

$$f_\alpha(x) \sim \frac{e^{\alpha x}}{x^\alpha e^{2ax}} \sim \frac{e^{-(2a-\alpha)x}}{x^\alpha}, \text{ per } x \to +\infty.$$

Per il criterio di confronto asintotico abbiamo allora che l'integrale proposto converge a $+\infty$ se e solo se $\alpha \leq 2a$. Qui abbiamo usato il fatto che se $\alpha = 2a$ allora l'espressione diventa $\frac{1}{x^{2a}}$ con $2a > 1$.

`Convergenza a` $-\infty$: Ragionando come nel punto precedente abbiamo

$$f_\alpha \sim \frac{e^{-\alpha|x|}}{|x|^\alpha e^{2a|x|}} = \frac{e^{-(2a+\alpha)|x|}}{|x|^\alpha} \text{ per } x \to -\infty..$$

Per il criterio di confronto asintotico abbiamo allora che l'integrale proposto converge a $-\infty$ se e solo se $\alpha > -2a$. Osserviamo che adesso il caso $\alpha = -2a$ non dà convergenza.

`Conclusione`: **L'integrale proposto converge se e solo se $\alpha \in (-2a, 2a]$.**

`Calcolo nel caso` $\alpha = 0$: Osserviamo che con la sostituzione $e^{ax} = t$ si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\cosh(ax))^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4}{(e^{ax}+e^{-ax})^2} = \frac{4}{a}\int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2+1)^2}\, dt.$$

Calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int \frac{t}{(t^2+1)^2} dt = -\frac{1}{2}\frac{1}{t^2+1} + c$$

Concludendo:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4}{(e^{ax}+e^{-ax})^2}, dx &= \frac{4}{a}\int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2+1)^2}\, dt \\
&= \frac{2}{a} - \frac{2}{a}\lim_{c\to+\infty} \frac{1}{c^2+1} \\
&= \frac{2}{a}.
\end{aligned}$$

Esercizio 4. [5 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + \dfrac{y^2 x}{x^2 + e^a} = 0 \\ y(0) = \dfrac{1}{a} \end{cases}.$$

$[a = 5, 4, 3, 2]$

Svolgimento. Nel problema di Cauchy proposto risolviamo prima l'equazione e poi imponiamo la condizione iniziale. L'equazione si presta ad essere risolta separando le variabili:

$$\frac{y'}{y^2} = -\frac{x}{x^2 + e^a}.$$

Risolviamo separatamente i due integrali

$$\int \frac{y'}{y^2}\, dx = -\frac{1}{y(x)} + c \qquad \text{e} \qquad \int -\frac{x}{x^2 + e^a}\, dx = -\frac{1}{2}\log(x^2 + e^a) + c.$$

Pertanto

$$\frac{1}{y(x)} = \frac{1}{2}\log(x^2 + e^a) + c.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = \frac{1}{a}$ si ha

$$a = \frac{a}{2} + c.$$

da cui segue $c = \frac{a}{2}$. Pertanto

$$\frac{1}{y(x)} = \frac{1}{2}\log(x^2 + e^a) + \frac{a}{2}$$

da cui segue che la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{2}{\log(x^2 + e^a) + a}.$$

Esercizio 5 [5 punti] Disegnare sul piano complesso l'insieme

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{-a\} \,:\, \left| \frac{z-a}{z+a} \right| = b \right\}.$$

$[(a,b) = (1,2), (-1,2), (1,3), (-1,3)]$

Svolgimento. Scriviamo $z = x+iy$. Allora la condizione richiesta diventa, $|x+iy-a| = b|x+iy+a|$. Dato che $b > 0$ elevando al quadrato si ha la condizione equivalente:

$$(x-a)^2 + y^2 = b^2(x+a)^2 + b^2y^2.$$

Riarrangiando i termini si ottiene la circonferenza:

$$(1-b^2)x^2 + (1-b^2)y^2 - 2ax(1+b^2) + a^2(1-b^2) = 0,$$

con centro in $C(a\frac{1+b^2}{1-b^2}, 0)$ e raggio $r = \frac{2ab}{b^2-1}$ (usando $b > 1$).