

**Università di Roma “Tor Vergata” – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta gennaio 2022 – I turno**

Cognome: (in STAMPATELLO)
Nome: (in STAMPATELLO)
Matricola:
Titolare del corso:
Prova orale:

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin \left(2\pi \sqrt{n^2 + a} \right).$$

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento: Usando anche lo sviluppo, per $x \rightarrow 0$,

$$(1 + x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x),$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin(2\pi \sqrt{n^2 + a}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin \left(2\pi n \sqrt{1 + \frac{a}{n^2}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin \left(2\pi n \left(1 + \frac{a}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin \left(2\pi n + \frac{\pi a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin \left(\frac{\pi a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{\pi a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= \pi a. \end{aligned}$$

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$\sqrt[3]{(x-a)(x+a)^2}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$$[a = (5, 4, 3, 2)]$$

Svolgimento: **Dominio, segno, intersezione con gli assi:**

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}, \quad f(x) > 0 \quad \text{per } x > a, \quad f(x) = 0 \quad \text{per } x = \pm a, \quad f(0) = -a.$$

Limiti a $\pm\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Asintoti: c'è uno stesso asintoto obliquo a $\pm\infty$ rappresentato da

$$y = mx + q, \quad \text{con } m = 1 \quad \text{e } q = \frac{a}{3}.$$

Infatti per $x \rightarrow \pm\infty$:

$$f(x) = x \sqrt[3]{\left(1 - \frac{a}{x}\right) \left(1 + \frac{a}{x}\right)^2} = x \sqrt[3]{1 + \frac{a}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)} = x \left(1 + \frac{a}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x + \frac{a}{3} + o(1).$$

Derivata:

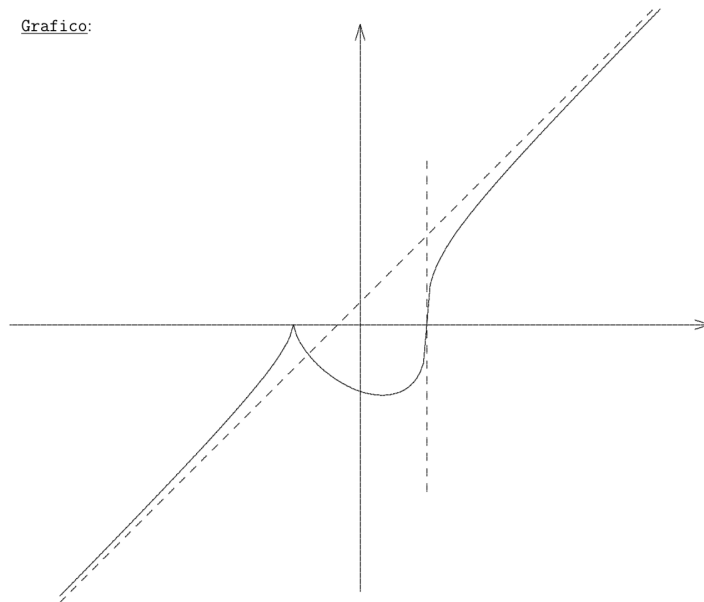
$$f'(x) = \frac{1}{3} \frac{3x - a}{(x-a)^{2/3}(x+a)^{1/3}} \quad \text{per } x \neq \pm a.$$

Poiché

$$\lim_{x \rightarrow -a^\pm} f'(x) = \mp\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^\pm} f'(x) = +\infty,$$

possiamo dedurre che in $-a$ e in a c'è una cuspide. Inoltre

$$f \text{ è crescente in } (-\infty, -a] \text{ e in } \left[\frac{a}{3}, +\infty\right); \quad f \text{ è decrescente in } \left[-a, \frac{a}{3}\right].$$

Possiamo dedurre allora che $\frac{a}{3}$ è un punto di minimo relativo.Grafico:Figure 1: Tratteggiati l'asintoto obliquo e la tangente nel punto di ascissa $x = a$

Esercizio 3. [7 punti] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^a \left| \frac{\sin x - x}{\sqrt{1+x^2}-1} \right|^\alpha (x+a) \log \left(\frac{x}{a-x} \right) dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 0$.

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento: Integrabilità in (un intorno di) 0: Detta f_α la funzione integranda, ed osservando che

$$\sin x - x = -\frac{1}{6}x^3 + o(x^4) \sim -\frac{1}{6}x^3, \quad \sqrt{1+x^2}-1 = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \sim \frac{1}{2}x^2, \quad \log \left(\frac{x}{a-x} \right) \sim \log x \quad \text{per } x \rightarrow 0^+$$

risulta

$$f_\alpha(x) \sim a \left(\frac{1}{3}x \right)^\alpha \log x \quad \text{per } x \rightarrow 0^+.$$

Per confronto asintotico, abbiamo allora che f_α è integrabile in 0 se e solo se $\alpha > -1$.

Integrabilità in (un intorno di) a: Essendo

$$\log \left(\frac{x}{a-x} \right) \sim -\log(a-x) \quad \text{per } x \rightarrow a^-$$

risulta

$$f_\alpha(cx) \sim -2a \left(\frac{a - \sin a}{\sqrt{1+a^2}-1} \right)^\alpha \log(a-x); \quad \text{per } x \rightarrow a^-$$

e possiamo concludere che f_α è integrabile in un intorno di a per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Concludendo, **l'integrale proposto è convergente se e solo se $\alpha > -1$.**

Calcolo per $\alpha = 0$:

$$\begin{aligned} & \int_0^a (x+a) \log \frac{x}{a-x} dx \\ &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^a (x+a) \log x dx - \lim_{c \rightarrow a^-} \int_0^c (x+a) \log(a-x) dx \\ &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \left[\left(\frac{1}{2}x^2 + ax \right) \log x - \frac{1}{4}x^2 - ax \right]_c^a \\ &\quad - \lim_{c \rightarrow a^-} \left[\left(-\frac{1}{2}c^2 - ac + \frac{3}{2}a^2 \right) \log(a-c) + \frac{1}{2} \left(\frac{c^2}{2} + 3ac \right) \right] \\ &= \frac{3}{2}a^2 \log a - \frac{5}{4}a^2 + \frac{7}{4}a^2 - \frac{3}{2}a^2 \log a \\ &= \frac{1}{2}a^2. \end{aligned}$$

Esercizio 4. [5 punti] Calcolare lo sviluppo di Taylor dell'ordine $n = 5$ con centro $x_0 = 0$ per la seguente funzione:

$$(x + a)^2 \left(\log(1 + \sin^2 x) - \sin(x^2) \right).$$

$$[a = 2, -2, 3, -3]$$

Svolgimento: Risulta

- $\sin x^2 = x^2 + o(x^5)$
- $\log(1 + t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$
- $(\sin x)^2 = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right)^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^5)$
- $\log(1 + \sin^2 x) = \left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^5) \right) - \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^5) \right)^2 + o(x^5)$
 $= x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^5) = x^2 - \frac{5}{6}x^4 + o(x^5)$
- $\log(1 + \sin^2 x) - \sin x^2 = \cancel{x^2} - \frac{5}{6}x^4 - \cancel{x^2} + o(x^5) = -\frac{5}{6}x^4 + o(x^5).$

Nella penultima relazione abbiamo usato la proprietà

$$\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^5) \right)^3 = x^6 \left(1 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^3) \right)^3 = o(x^5).$$

Riassumendo:

$$\begin{aligned} (x + a)^2 [\log(1 + \sin^2 x) - \sin x^2] &= (a^2 + 2ax + x^2) \left(-\frac{5}{6}x^4 + o(x^5) \right) \\ &= -\frac{5}{6}a^2x^4 - \frac{5}{3}ax^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

Esercizio 5 [5 punti] Risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione:

$$z^2 + i\bar{z} = 1 \quad \left[\bar{z}^2 + iz = 1, \quad iz^2 - \bar{z} = i, \quad i\bar{z}^2 - z = i \right].$$

Svolgimento: Risolviamo l'equazione $z^2 + i\bar{z} = 1$. Gli altri testi proposti si svolgono in modo analogo.

Scritto $z = a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$, si ha

$$z^2 = (a^2 - b^2) + (2ab)i, \quad i\bar{z} = i(a - bi) = b + ai.$$

Quindi l'equazione proposta è verificata se

$$(a^2 - b^2) + (2ab)i + b + ai = 1,$$

ovvero, eguagliando parti reali e parti immaginarie dell'equazione, quando è verificato il sistema

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + b = 1 \\ 2ab + a = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione è verificata per $a = 0$ o per $b = -\frac{1}{2}$.

Se $a = 0$ la prima equazione diventa $b^2 - b + 1 = 0$, che *non* ha soluzioni reali (N.B. $b \in \mathbb{R}$).

Se $b = -\frac{1}{2}$ la prima equazione diventa $a^2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$, che ha soluzioni $a = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Le soluzioni del problema proposto sono allora:

$$z_1 = \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{1}{2}i \quad \text{e} \quad z_2 = -\frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{1}{2}i.$$