Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 10 luglio 2025

Esercizio 1. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \left|\sin\left(\frac{\pi}{a}\frac{x^3}{1+x^6}\right)\right|$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Lo studio della derivata seconda non è necessario.

Suggerimento: può essere utile dimostrare la relazione, $\frac{x^3}{1+x^6} < 1$*, per* $x > 0$*.*
$[a = 8, 6, 4, 3]$

Svolgimento:

Dominio:: La funzione razionale fratta $\frac{x^3}{1+x^6}$ è definita per ogni x poiché il suo denominatore x^6+1 è sempre strettamente positivo (è maggiore o uguale ad 1). Le funzioni sin e *valore assoluto* sono definite su tutto $\mathbb{R}$. Pertanto il dominio di f è $\mathbb{R}$.

Simmetria: La funzione è pari infatti

$$f(-x) = \left|\sin\left(\frac{\pi}{a}\frac{(-x)^3}{1+(-x)^6}\right)\right| = \left|\sin\left(\frac{\pi}{a}\frac{-x^3}{1+x^6}\right)\right| = \left|-\sin\left(\frac{\pi}{a}\frac{x^3}{1+x^6}\right)\right| = f(x).$$

Possiamo limitarci a studiare la funzione per $x > 0$.

Continuità: La funzione razionale fratta $\frac{x^3}{1+x^6}$ è continua su $\mathbb{R}$ così come sin e *valore assoluto*. La funzione f è pertanto continua nel suo dominio $\mathbb{R}$ in quanto composizione di funzioni continue.

Limiti di frontiera e asintoti: Poiché il dominio di f è $\mathbb{R}$ ci basterà studiare il comportamento a $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{1+x^6} = 0.$$

Per continuità

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sin(0) = 0.$$

La funzione ha $y = 0$ come asintoto orizzontale a $\pm\infty$.

Derivabilità: La funzione razionale fratta $\frac{x^3}{1+x^6}$ e sin sono derivabili su $\mathbb{R}$. L'unico punto in cui in cui la derivabilità di f va studiata a parte è quando l' argomento del valore assoluto è nullo: ovvero quando

$$\sin\left(\frac{\pi}{a}\frac{x^3}{1+x^6}\right) = 0.$$

A questo punto possiamo usare il suggerimento. Notiamo che

$$\frac{x^3}{1+x^6} < 1 \iff x^6 - x^3 + 1 > 0,$$

ponendo $y = x^3$ abbiamo che $x^6 - x^3 + 1 > 0$ se e solo se $y^2 - y + 1 > 0$ che è verificato per ogni y in quanto $y^2 - y + 1$ è polinomio di secondo grado con discriminante negativo. Abbiamo dimostrato che

$$\frac{\pi}{a}\frac{x^3}{1+x^6} < \frac{\pi}{a} < \pi/2.$$

Pertanto

$$\sin\left(\frac{\pi}{a}\frac{x^3}{1+x^6}\right) = 0 \iff \frac{x^3}{1+x^6} = 0 \iff x = 0.$$

Concludendo la funzione f è derivabile per ogni $x \neq 0$ e la derivabilità in $x = 0$ è da studiare a parte.

La derivata per $x > 0$ vale:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\pi}{a}\left(\frac{x^3}{1+x^6}\right)' \cos\left(\frac{\pi}{a}\frac{x^3}{1+x^6}\right) \\
&= \frac{\pi}{a}\frac{3x^2(1+x^6)-6x^8}{(1+x^6)^2} \cos\left(\frac{\pi}{a}\frac{x^3}{1+x^6}\right) \\
&= \frac{3\pi}{a}\frac{x^2(1-x^6)}{(1+x^6)^2} \cos\left(\frac{\pi}{a}\frac{x^3}{1+x^6}\right).
\end{aligned}
$$

Monotonia: Il segno della derivata è dato solo dal termine $(1-x^6)$ in quanto

$$\frac{\pi}{a}\frac{x^3}{1+x^6} < \pi/2 \implies \cos\left(\frac{\pi}{a}\frac{x^3}{1+x^6}\right) > 0.$$

Avremo che f è crescente su $(-\infty,-1)$ e $(0,1)$ e decrescente altrimenti

Massimi e minimi: La funzione f ha un massimo globale in 1 (e -1) ed un minimo globale in 0.

Punti di non derivabilità: Studiamo la derivabilità in $x = 0$. La derivata destra in 0 è data da

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0.$$

Per simmetria

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0.$$

La funzione f è quindi derivabile in $x = 0$ con derivata nulla.

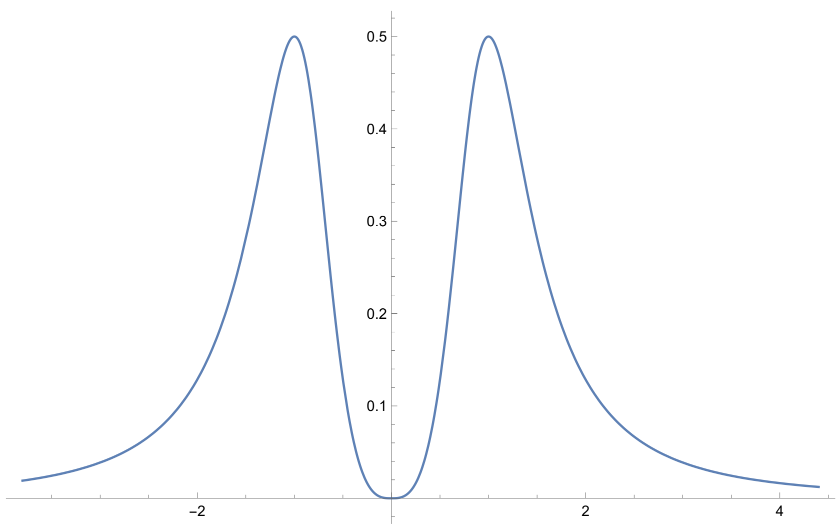

FIGURE 1. Grafico di f per $a = 3$

Esercizio 2. [7 punti] Studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} (\arctan(x+\alpha) - \arctan(x))^\beta \, dx.$$

al variare del parametro β e calcolarlo per $\beta = 1$.

Suggerimento: può essere utile (ma non necessaria) la relazione, $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$, $x > 0$.

$[\alpha = 2, 3, \sqrt{2}, \sqrt{3}]$

<u>*Svolgimento:*</u>

Convergenza:
La funzione è continua in 0, pertanto è necessario studiare la convergenza solo a $+\infty$. Dalla formula $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$ abbiamo

$$(\arctan(x+\alpha) - \arctan(x))^\beta = (\arctan(1/x) - \arctan(1/(x+\alpha)))^\beta \sim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+\alpha}\right)^\beta \sim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{2\beta}}.$$

Per il Teorema del confronto, la funzione $x \mapsto (\arctan(x+1) - \arctan(x))^\beta$ è integrabile su $[0, +\infty)$ se e solo se $\beta > 1/2$.

Calcolo dell'integrale:
Poniamo, per $A > 0$, $F(A) = \int_0^A (\arctan(x+\alpha) - \arctan(x))\, dx$. Allora

$$\begin{aligned} F(A) &= \int_0^A \arctan(x+\alpha)\, dx - \int_0^A \arctan(x)\, dx \\ &= \int_\alpha^{A+\alpha} \arctan(x)\, dx - \int_0^A \arctan(x)\, dx \\ &= \int_A^{A+\alpha} \arctan(x)\, dx - \int_0^\alpha \arctan(x)\, dx. \end{aligned}$$

Il primo termine tende a $\pi/2$. Infatti la funzione arctan è crescente e, per ogni $x \in [A, A+\alpha]$, abbiamo

$$\arctan A \leq \arctan x \leq \arctan(A+\alpha).$$

Per integrazione (o per il Teorema del Valore Medio), abbiamo

$$\alpha \arctan A \leq \int_A^{A+\alpha} \arctan(x)\, dx \leq \alpha \arctan(A+\alpha).$$

Ma $\arctan(A) \to \frac{\pi}{2}$ e $\arctan(A+\alpha) \to \frac{\pi}{2}$ quando $A \to +\infty$. Per il Teorema dei Carabinieri, ne deduciamo che $\int_A^{A+\alpha} \arctan(x)\, dx$ tende a $\alpha\frac{\pi}{2}$.
Il secondo termine si ottiene integrando per parti. Infatti,

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha \arctan(x)\, dx = [x \arctan x]_0^\alpha - \int_0^\alpha \frac{x}{1+x^2}\, dx \\ =& \alpha \arctan \alpha - \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^\alpha \\ =& \alpha \arctan \alpha - \frac{1}{2}\ln(1+\alpha^2). \end{aligned}$$

Dai punti precedenti, facendo tendere A verso $+\infty$, ne deduciamo che, secondo i valori di α, avremo

$$\int_0^{+\infty} (\arctan(x+2) - \arctan(x))\, dx = \pi - 2\arctan 2 + \frac{1}{2}\ln(5), \qquad \text{per } \alpha = 2$$

$$\int_0^{+\infty} (\arctan(x+3) - \arctan(x))\, dx = \frac{3}{2}\pi - 3\arctan 3 + \frac{1}{2}\ln(10), \qquad \text{per } \alpha = 3,$$

$$\int_0^{+\infty} (\arctan(x+\sqrt{2}) - \arctan(x))\, dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi - \sqrt{2}\arctan\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln(3), \qquad \text{per } \alpha = \sqrt{2},$$

$$\int_0^{+\infty} (\arctan(x+\sqrt{3}) - \arctan(x))\, dx = \frac{\sqrt{3}}{6}\pi + \ln(2), \qquad \text{per } \alpha = \sqrt{3}.$$

Calcolo dell'integrale: Metodo alternativo

Un metodo alternativo ed equivalente per calcolare l' integrale consiste nell' usare l' integrazione per parti. Ovvero il fatto che

$$\int \arctan(x+\alpha)\, dx = x\arctan(x+\alpha) - \int \frac{x}{1+(x+\alpha)^2} dx.$$

In tal caso si arriva ad una relazione del tipo

$$\begin{aligned} F(A) &= \int_0^A \arctan(x+\alpha)\, dx - \int_0^A \arctan(x)\, dx \\ &= A\arctan(A+\alpha) - \int_0^A \frac{x}{1+(x+\alpha)^2} dx - A\arctan(A) + \int_0^A \frac{x}{1+x^2} dx, \end{aligned}$$

per $A > 0$. A questo punto si calcolano esplicitamente gli integrali delle funzioni razionali fratte

$$\int_0^A \frac{x}{1+x^2} dx \qquad \int_0^A \frac{x}{1+(x+\alpha)^2} dx,$$

e il limite

$$\lim_{A\to+\infty} F(A),$$

come sopra per arrivare allo stesso risultato.

Esercizio 3. [6 punti] Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) &= \frac{2}{1-t^2}x(t) + (1+t)e^t \\ x(2) &= a \end{cases} \tag{1}$$

[$a = 3, 6, 9, 12$]

Svolgimento: Equazione lineare. Notiamo che $\frac{2}{1-t^2} = \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}$ e risolviamo l'equazione omogenea associata

$$x'(t) = \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right) x(t).$$

Pertanto

$$\frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right) dt, \iff \ln|x| = \ln|1+t| - \ln|1-t| + C,$$

pertanto, tenendo conto dei segni, la soluzione generale dell'omogenea ha la forma:

$$x(t) = C\frac{t+1}{t-1}.$$

Per determinare una soluzione particolare di (1) utilizziamo il metodo della variazione delle costanti. Sia

$$x_p(t) = u(t)\frac{t+1}{t-1}.$$

Derivando otteniamo

$$x_p'(t) = u'(t)\frac{t+1}{t-1} - u(t)\frac{2}{(t-1)^2},$$

e sostituendo

$$u'(t)\frac{t+1}{t-1} - u(t)\frac{2}{(1-t)^2} = \frac{2}{1-t^2}u(t)\frac{t+1}{t-1} + (t+1)e^t, \iff u'(t)\frac{t+1}{t-1} = (t+1)e^t, \iff u'(t) = (t-1)e^t,$$

quindi

$$u(t) = (t-2)e^t + C.$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale è data dalla somma della soluzione generale dell'equazione omogenea e della soluzione particolare,

$$x(t) = C\frac{t+1}{t-1} + (t-2)\frac{t+1}{t-1}e^t.$$

La soluzione del problema di Cauchy si ottiene risolvendo $x(2) = 3C$, quindi $C = a/3$. Si noti che la soluzione è definita per ogni $t > 1$.

Esercizio 4. [5 punti]
Consideriamo i numeri complessi:

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3}, \quad z_2 = 1 + i, \qquad \text{e } z_3 = \frac{z_1}{z_2}.$$

I) Scrivere z_3 in forma cartesiana.
II) Scrivere z_3 in forma trigonometrica.
III) Dedurre i valori esatti di $\cos\frac{\pi}{12}$ e $\sin\frac{\pi}{12}$.

[varianti con $z_1 = 1 \pm i\sqrt{3}$ e $z_2 = 1 \pm i$]

<u>*Svolgimento:*</u> Vediamo lo svolgimento con $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ e $z_2 = 1 + i$.

I) Moltiplichiamo e dividiamo per il complesso coniugata del denominatore:

$$z_3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\frac{1-i}{1-i} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i.$$

II) D' altra parte abbiamo

$$z_1 = 2e^{i\pi/3}$$

e

$$z_2 = \sqrt{2}e^{i\pi/4},$$

da cui

$$z_3 = \sqrt{2}e^{i(\pi/3-\pi/4)} = \sqrt{2}(\cos(\pi/12) + i\sin(\pi/12)).$$

Dalla scrittura trigonometrica, otteniamo un'altra scrittura cartesiana di z_3:

$$z_3 = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} + i\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}. \tag{2}$$

III) Per l'unicità della scrittura in forma cartesiana, ne deduciamo che

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

e

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

Il procedimento è lo stesso per tutti e quattro i casi. Nei due casi in cui $z_1 = 1 + i\sqrt{3}, z_2 = 1 - i$ oppure $z_1 = 1 - i\sqrt{3}, z_2 = 1 + i$ si ottiene in (2) una scrittura in termini di $\cos\left(\frac{7}{12}\pi\right)$ e $\sin\left(\frac{7}{12}\pi\right)$. Ci si riconduce allo stesso risultato osservando che

$$\cos\left(\frac{7}{12}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{6}{12}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{12}$$

e

$$\sin\left(\frac{7}{12}\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{12.}$$

Esercizio 5. [6 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\cos(x) - \frac{1}{1-x^2}\right)\arctan(ax) + \frac{3a}{2}x^3}{2\sqrt{1-x^5}-2}$$

$[a = \sqrt{2}, 1, 2, \frac{1}{2}\ ]$

Svolgimento: **Denominatore:** per $x \to 0$ abbiamo

$$2\sqrt{1-x^5} - 2 = 2\left(1 - \frac{x^5}{2}\right) - 2 + o(x^5) = 2 - x^5 - 2 + o(x^5) = -x^5 + o(x^5)$$

Numeratore: Espandiamo in serie di Taylor le funzioni al numeratore attorno a $x = 0$:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$
$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + o(x^5)$$
$$\arctan(ax) = ax - \frac{a^3}{3}x^3 + o(x^3).$$

sostituendo abbiamo

$$\begin{aligned}
&\left(\cos(x) - \frac{1}{1-x^2}\right)\arctan(ax) + \frac{3a}{2}x^3 \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - (1 + x^2 + x^4) + o(x^4)\right)\left(ax - \frac{a^3}{3}x^3 + o(x^3)\right) + \frac{3a}{2}x^3 \\
&= \left(-\frac{3}{2}x^2 - \frac{23}{24}x^4 + o(x^4)\right)\left(ax - \frac{a^3}{3}x^3 + o(x^3)\right) + \frac{3a}{2}x^3 \\
&= -\frac{3a}{2}x^3 + \frac{a^3}{2}x^5 - \frac{23a}{24}x^5 + \frac{3a}{2}x^3 + o(x^5) \\
&= +\left(\frac{a^3}{2}x^5 - \frac{23a}{24}x^5\right) + o(x^5) \\
&= \frac{12a^3 - 23a}{24}x^5 + o(x^5).
\end{aligned}$$

Il risultato è

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\cos(x) - \frac{1}{1-x^2}\right)\arctan(ax) + \frac{3a}{2}x^3}{2\sqrt{1-x^5}-2} = \frac{23a - 12a^3}{24}.$$

In conclusione secondo i valori di a, avremo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\cos(x) - \frac{1}{1-x^2}\right)\arctan(\sqrt{2}x) + \frac{3}{\sqrt{2}}x^3}{2\sqrt{1-x^5}-2} = -\frac{\sqrt{2}}{24}, \quad (a = \sqrt{2}),$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\cos(x) - \frac{1}{1-x^2}\right)\arctan(x) + \frac{3}{2}x^3}{2\sqrt{1-x^5}-2} = \frac{11}{24}, \quad (a = 1)$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\cos(x) - \frac{1}{1-x^2}\right)\arctan(2x) + 3x^3}{2\sqrt{1-x^5}-2} = -\frac{25}{12}, \quad (a = 2),$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\cos(x) - \frac{1}{1-x^2}\right)\arctan(x/2) + \frac{3}{4}x^3}{2\sqrt{1-x^5}-2} = \frac{5}{12}, \quad (a = 1/2).$$