Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 13/07/2021

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [8 punti] Data la funzione:

$$f(x) = \frac{ae^{bx} + 2^{bx}}{\left(1 + \frac{b}{x}\right)^{x^2}},$$

calcolare $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

$[(a, b) = (2, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 3)]$

<u>*Svolgimento:*</u> Utilizziamo lo sviluppo di Taylor per $y \to 0$:

$$\log(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2).$$

Pertanto, per $x \to \pm\infty$ si ha

$$\left(1 + \frac{b}{x}\right)^{x^2} = \exp\left(x^2 \log\left(1 + \frac{b}{x}\right)\right) = \exp\left(x^2\left(\frac{b}{x} - \frac{b^2}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right)$$
$$= \exp\left(bx - \frac{b^2}{2} + o(1)\right) = e^{-\frac{b^2}{2}} e^{bx}(1 + o(1)).$$

D'altra parte

$$ae^{bx} + 2^{bx} = ae^{bx}(1 + o(1)) \text{ per } \to +\infty,$$
$$ae^{bx} + 2^{bx} = 2^{bx}(1 + o(1)) \text{ per } \to -\infty.$$

Si conclude

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ae^{bx} + 2^{bx}}{\left(1 + \frac{b}{x}\right)^{x^2}} = ae^{\frac{b^2}{2}},$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{ae^{bx} + 2^{bx}}{\left(1 + \frac{b}{x}\right)^{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2^{bx}(1 + o(1))}{e^{-\frac{b^2}{2}} e^{bx}(1 + o(1))} = +\infty.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \log\left(e^{a|x|} + e^{-a|x|} - 2\right) - (a+1)|x|$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$[a = (2, 3, 4, 5)]$

Svolgimento: Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. f è pari.
Risulta:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

Per $x \to +\infty$ risulta

$$f(x) = \log\left(e^{ax} + e^{-ax} - 2\right) - (a+1)x = \log\left(1 + e^{-2ax} - 2e^{-ax}\right) - x = -x + o(1)$$

$\boxed{y = -x \text{ asintoto obliquo a } +\infty.}$

Per $x > 0$: $f'(x) = a\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{ax}+e^{-ax}-2} - a - 1 = \frac{-e^{ax}-(2a+1)e^{-ax}+2a+2}{e^{ax}+e^{-ax}-2}$, pertanto f è crescente per $0 < x \le \frac{\log(2a+1)}{a}$ e f è decrescente per $x \ge \frac{\log(2a+1)}{a}$.

$\boxed{x = \frac{\log(2a+1)}{a} \text{ punto di massimo assoluto.}}$

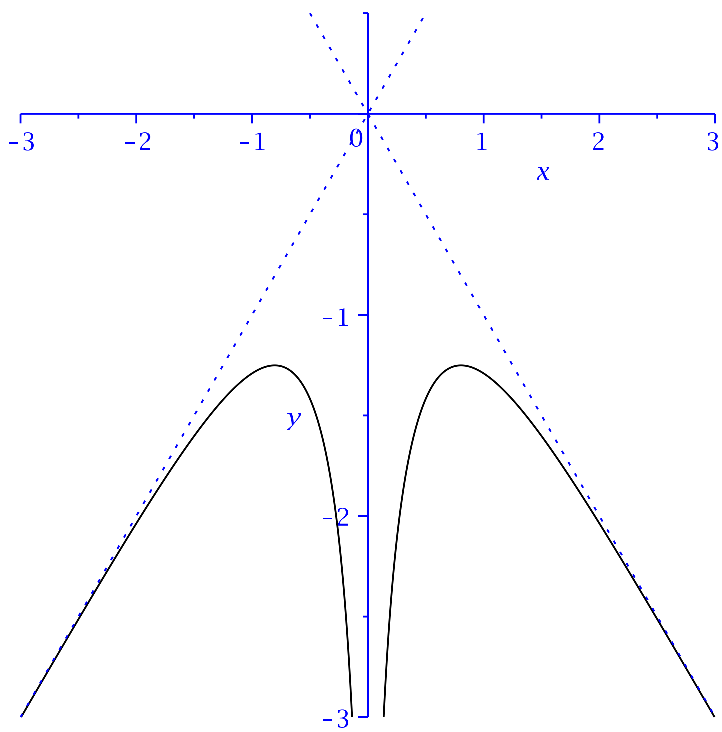

FIGURA 1. Grafico di $f(x) = \log\left(e^{2|x|} + e^{-2|x|} - 2\right) - 3|x|$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. [**8 punti**] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^a \frac{x-b}{(ax-x^2)^\alpha} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

$[(a,b) = (2,5), (3,4), (6,3), (5,2)]$

Svolgimento: Risulta:

$$f(x) \sim \frac{-b}{(ax)^\alpha} \text{ per } x \to 0^+$$

Pertanto f è integrabile in $(0, \frac{a}{2})$ se e solo se $\alpha < 1$. Inoltre

$$f(x) \sim \frac{a-b}{a^\alpha (a-x)^\alpha} \text{ per } x \to a^-.$$

Pertanto f è integrabile in $(\frac{a}{2}, a)$ se e solo se $\alpha < 1$.
Quindi f è integrabile in $(0,a)$ se e solo se $\alpha < 1$.
Calcoliamo l'integrale per $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\int_0^a \frac{x-b}{\sqrt{ax-x^2}} dx = \int_0^a \frac{x-b}{\sqrt{x}\sqrt{a-x}} dx = \int_0^a \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}} dx - b \int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{a-x}}.$$

Calcoliamo i due integrali: con la sostituzione $\sqrt{a-x} = t$ e, successivamente, $t = \sqrt{a} \sin u$

$$\int_0^a \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}} dx = 2 \int_0^{\sqrt{a}} \sqrt{a-t^2} dt = 2a \int_0^{\pi/2} \cos^2 u du = \left[a \frac{2u + \sin(2u)}{2} \right]_0^{\pi/2} = a\frac{\pi}{2}.$$

Con la sostituzione $t = \sqrt{x}$ e si ha

$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{a-x}} = 2 \int_0^{\sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{a-t^2}} dt = \frac{2}{\sqrt{a}} \int_0^{\sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{t}{\sqrt{a}})^2}} dt = \left[2 \arcsin \frac{t}{\sqrt{a}} \right]_0^{\sqrt{a}} = \pi.$$

Si conclude:

$$\int_0^a \frac{x-b}{\sqrt{ax-x^2}} dx = a\frac{\pi}{2} - b\pi.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. [6 punti] Risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione:

$$|z|\big((1+\mathrm{i})z\big)^2 = 2a^3.$$

$[a = \pm 1, \pm 2]$

Svolgimento: Consideriamo $a > 0$. Poiché $(1+\mathrm{i})^2 = 2\mathrm{i}$, l'equazione può riscriversi nella forma:

$$\mathrm{i}|z|z^2 = a^3.$$

Uguagliando i moduli di ambo i membri si ha:

$$|z|^3 = a^3 \iff |z| = a.$$

Si deduce che le eventuali soluzioni sono della forma $z = |a|e^{\mathrm{i}\theta}$ da cui, sostituendo nell'equazione

$$\mathrm{i}e^{2\mathrm{i}\theta} = 1$$

da cui segue

$$e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+2\theta)} = 1.$$

Pertanto

$$\frac{\pi}{2} + 2\theta = 2k\pi.$$

Si conclude che le soluzioni dell'equazione sono

$$z = ae^{\mathrm{i}(-\frac{\pi}{4}+k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ovvero

$$z = ae^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = a\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i}), \quad z = ae^{-\mathrm{i}(\frac{\pi}{4}+\pi)} = a\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+\mathrm{i}).$$