Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 18/06/2021

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	
Prova orale:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [8 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n(na)^{\frac{1}{nb}} - n}{\log(cn)}.$$

$[(a,b,c) = (2,1,2),(1,4,2),(2,2,3),(3,3,1)]$

<u>*Svolgimento:*</u> Utilizziamo lo sviluppo di Taylor per $y \to 0^+$:

$$e^y = 1 + y + o(y).$$

Pertanto

$$(na)^{\frac{1}{nb}} = \exp\left(\frac{1}{nb}\log(na)\right) = \exp\left(\frac{\log n + \log a}{nb}\right)$$
$$= 1 + \frac{\log n}{nb} + o\left(\frac{\log n}{n}\right)$$

da cui segue

$$n(na)^{\frac{1}{nb}} - n = \frac{\log n}{b} + o(\log n).$$

D'altra parte

$$\log(cn) = \log n + o(\log n).$$

Si conclude che il limite richiesto vale

$$\frac{1}{b}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. **[8 punti]** Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \arctan\Big((a-x)\log(|a-x|)\Big)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$[a = (2, 3, 4, 5)]$

Svolgimento: Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{a\}$. Risulta:

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

$\boxed{y = \frac{\pi}{2} \text{ asintoto orizzontale a } -\infty,\ y = \frac{\pi}{2} \text{ asintoto orizzontale a } +\infty.}$

Per $x \neq a$: $f'(x) = \frac{-\log(|a-x|)-1}{1+(a-x)^2\log^2(|a-x|)}$, pertanto f è decrescente per $x \le a - \frac{1}{e}$ e $x \ge a + \frac{1}{e}$ f è crescente per $a - \frac{1}{e} \le x < a$ e $a < x \le a + \frac{1}{e}$.

$\boxed{x = a - \frac{1}{e} \text{ punto di minimo relativo, } x = a + \frac{1}{e} \text{ punto di massimo relativo.}}$

$$f\Big(a - \frac{1}{e}\Big) = -\arctan\frac{1}{e}, \qquad f\Big(a + \frac{1}{e}\Big) = \arctan\frac{1}{e}.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to a} f'(x) = +\infty.$$

$\boxed{x = a \text{ punto a tangente verticale.}}$

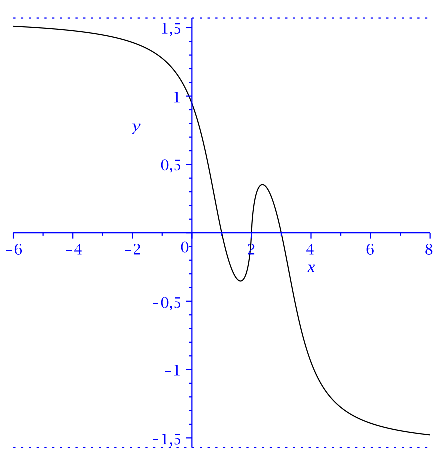

FIGURA 1. Grafico di $f(x) = \arctan\Big((2-x)\log(|2-x|)\Big)$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. [**8 punti**] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_{\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{a}} \frac{1}{\sqrt{x^3}} \frac{\arcsin(\sqrt{1-ax})}{(1-ax)^\alpha} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 0$.

$[a = 2, 3, 4, 5]$

<u>*Svolgimento:*</u> Risulta:

$$f(x) \sim \sqrt{a^3} \frac{\sqrt{1-ax}}{(1-ax)^\alpha} = a^{2-\alpha} \frac{1}{(\frac{1}{a}-x)^{\alpha-\frac{1}{2}}} \text{ per } x \to \frac{1}{a}^-.$$

Pertanto f è integrabile in $(\frac{1}{2a}, \frac{1}{a})$ se e solo se $\alpha < \frac{3}{2}$.
Calcoliamo l'integrale per $\alpha = 0$:

$$\int_{\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{a}} \frac{\arcsin(\sqrt{1-ax})}{\sqrt{x^3}} dx.$$

Con la sostituzione $t = \sqrt{1-ax}$ e si ha

$$\int_{\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{a}} \frac{\arcsin(\sqrt{1-ax})}{\sqrt{x^3}} dx = 2\sqrt{a} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} t \frac{\arcsin t}{\sqrt{(1-t^2)^3}} dt.$$

Risolviamo l'ultimo integrale integrando per parti:

$$\begin{aligned} \int t \frac{\arcsin t}{\sqrt{(1-t^2)^3}} dt &= \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)' \arcsin t dt = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \arcsin t - \int \frac{1}{1-t^2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \arcsin t - \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \arcsin t - \frac{1}{2} \log \frac{1+t}{1-t} + c \end{aligned}$$

Si conclude:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{a}} \frac{\arcsin(\sqrt{1-ax})}{\sqrt{x^3}} dx &= 2\sqrt{a} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} t \frac{\arcsin t}{\sqrt{(1-t^2)^3}} dt = 2\sqrt{2a} \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{a} \log \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \\ &= \frac{\pi}{2} \sqrt{2a} - \sqrt{a} \log \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}. \end{aligned}$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. **[6 punti]** Calcolare lo sviluppo di Taylor dell'ordine $n = 3$ con centro $x_0 = 0$ per la seguente funzione:

$$\frac{\sin x}{\log(e + ax)}.$$

$[a = \pm 1, \pm 2]$

Svolgimento: Utilizziamo lo sviluppo di Taylor per $y \to 0^+$:

$$\sin y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^3), \quad \log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2), \quad \frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 + o(y^2).$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\log(e+ax)} &= \frac{1}{1+\log(1+\frac{a}{e}x)} = \frac{1}{1+\frac{a}{e}x - \frac{a^2}{2e^2}x^2 + o(x^2)} \\ &= 1 - \frac{a}{e}x + \frac{a^2}{2e^2}x^2 + \left(\frac{a}{e}x + o(x)\right)^2 + o(x^2) \\ &= 1 - \frac{a}{e}x + \frac{a^2}{2e^2}x^2 + \frac{a^2}{e^2}x^2 + o(x^2) = 1 - \frac{a}{e}x + \frac{3a^2}{2e^2}x^2 + o(x^2).\end{aligned}$$

Si deduce che

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{\log(e+ax)} &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 - \frac{a}{e}x + \frac{3a^2}{2e^2}x^2 + o(x^2)\right) \\ &= x - \frac{a}{e}x^2 + \frac{3a^2}{2e^2}x^3 - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x - \frac{a}{e}x^2 + \frac{9a^2 - e^2}{6e^2}x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$