Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 30/01/2019

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	
Esame orale:	

Esercizio	**Punteggio**
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

a/b/c/d

Esercizio 1. [**5 punti**] Calcolare lo sviluppo di Taylor dell'ordine $n = 5$ nel punto $x_0 = 0$ per la seguente funzione:

$$f(x) = \log(Ax^3 + \cos x) - \frac{x^2}{2}.$$

$[A = 1, -1, 2, -2]$

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y \to 0$:

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3), \qquad \cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + o(y^5).$$

Pertanto

$$Ax^3 + \cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + Ax^3 + \frac{x^4}{24} + o(x^5),$$

da cui segue

$$\begin{aligned}
\log(Ax^3 + \cos x) &= \log\big(1 + (Ax^3 + \cos x - 1)\big) \\
&= -\frac{x^2}{2} + Ax^3 + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\Big(-\frac{x^2}{2} + Ax^3 - \frac{x^4}{24} + o(x^5)\Big)^2 + \frac{1}{3}\Big(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\Big)^3 + o(x^6) \\
&= -\frac{x^2}{2} + Ax^3 + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\Big(\frac{x^4}{4} - Ax^5\Big) + o(x^5) \\
&= -\frac{x^2}{2} + Ax^3 - \frac{x^4}{12} + \frac{A}{2}x^5 + o(x^5).
\end{aligned}$$

Si deduce

$$f(x) = -x^2 + Ax^3 - \frac{x^4}{12} + \frac{A}{2}x^5 + o(x^5).$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n(1+e^{-n})^{\frac{1}{n}} - \log(1+e^n)}{\sin^2\left(A\frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n!}\right)}.$$

$[A = 1, 2, 3, 4]$

<u>*Svolgimento:*</u> Si ha:

$$\log(1+e^{-n}) = e^{-n} - \frac{e^{-2n}}{2} + \frac{e^{-3n}}{3} + o(e^{-3n})$$

da cui segue

$$\begin{aligned}(1+e^{-n})^{\frac{1}{n}} &= \exp\left(\frac{\log(1+e^{-n})}{n}\right) = \exp\left(\frac{1}{n}\left(e^{-n} - \frac{e^{-2n}}{2} + \frac{e^{-3n}}{3} + o(e^{-3n})\right)\right)\\ &= 1 + \frac{e^{-n} - \frac{e^{-2n}}{2} + \frac{e^{-3n}}{3} + o(e^{-3n})}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-n} - \frac{e^{-2n}}{2} + o(e^{-2n})}{n}\right)^2 + o\left(\frac{e^{-2n}}{n^2}\right)\\ &= 1 + \frac{e^{-n}}{n} - \frac{e^{-2n}}{2n} + \frac{e^{-2n}}{2n^2} + o\left(\frac{e^{-2n}}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Pertanto

$$n\cdot(1+e^{-n})^{\frac{1}{n}} - \log(1+e^n) = n\cdot\sqrt[n]{1+e^{-n}} - n - \log(1+e^{-n}) = \frac{e^{-2n}}{2n} + o\left(\frac{e^{-2n}}{n}\right).$$

D'altra parte

$$\sin^2\left(A\frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n!}\right) \sim \left(A\frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n!}\right)^2 = \frac{e^{-2n}}{n}\left(A + \frac{\sqrt{n}e^n}{n!}\right)^2 \sim A^2\frac{e^{-2n}}{n},$$

dove, nell'ultimo passaggio, si è usato $\frac{\sqrt{n}e^n}{n!} = \frac{e}{\sqrt{n}}\frac{e^{n-1}}{(n-1)!} \to 0$.
Si conclude che il limite richiesto vale

$$\frac{1}{2A^2}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \arcsin(|x^2 - (2A+1)x + A^2 + A| - 1)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

[$A = -2, -1, 1, 2$]

<u>*Svolgimento:*</u> Dominio:

$$\{x \in \mathbb{R} \,|\, -1 \leq |x^2 - (2A+1)x + A^2 + A| - 1 \leq 1\} = \{A - 1 \leq x \leq A + 2\}$$

Per $A-1 < x < A$ e $A+1 < x < A+2$: $f'(x) = \frac{2x-(2A+1)}{\sqrt{1-(x^2-(2A+1)x+A^2+A-1)^2}}$, pertanto f è decrescente per $A-1 < x < A$ e f è crescente per $A+1 < x < A+2$.
Per $A < x < A+1$: $f'(x) = \frac{2A+1-2x}{\sqrt{1-((2A+1)x-x^2-A^2-A-1)^2}}$, pertanto f è crescente per $A < x \leq \frac{2A+1}{2}$ e f è decrescente per $\frac{2A+1}{2} \leq x < A+1$.

$\boxed{x = A,\ x = A+1 \text{ punti di minimo relativo.}}$

$\boxed{x = \frac{2A+1}{2} \text{ punto di massimo relativo.}}$

Inoltre

$$f(A-1) = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to(A-1)^+} f'(x) = -\infty, \qquad f(A+2) = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to(A+2)^-} f'(x) = +\infty,$$

$$f(A) = f(A+1) = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to A^-} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to A^+} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to(A+1)^-} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to(A+1)^+} f'(x)+\infty.$$

$\boxed{x = A-1,\ x = A,\ x = A+1,\ x = A+2 \text{ punti di cuspide.}}$

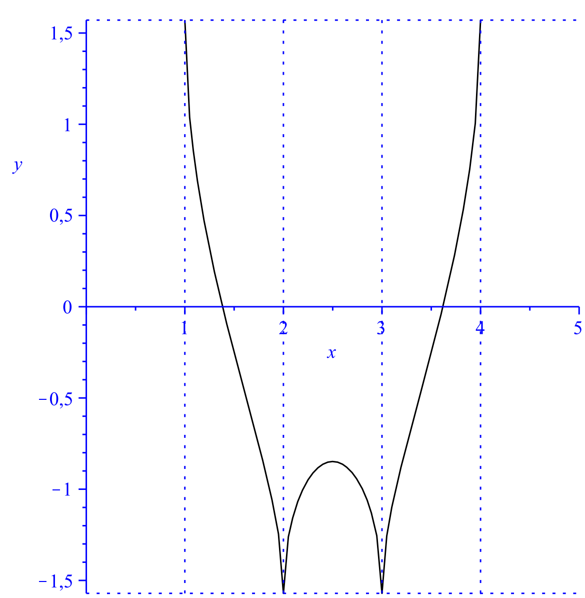

FIGURA 1. Caso $A = 2$: grafico di $f(x) = \arcsin(|x^2 - 5x + 6| - 1)$.

Esercizio 4. **[7 punti]** Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{\sqrt{1-e^{-Ax}}} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = \frac{3}{2}A$.

$[A = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento: Risulta:

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{1-e^{-Ax}}} \sim \frac{1}{\sqrt{Ax}} \text{ per } x \to 0^+.$$

Segue che f è integrabile in $(0,1)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. D'altra parte

$$f(x) \sim e^{-\alpha x} \qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Segue che f è integrabile in $(1,+\infty)$ se e solo se $\alpha > 0$.
Pertanto f è integrabile in $(0,+\infty)$ se e solo se $\alpha > 0$.
Calcoliamo l'integrale per $\alpha = \frac{3}{2}A$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{3}{2}Ax}}{\sqrt{1-e^{-Ax}}} dx.$$

Con la sostituzione $e^{-Ax} = t$ e successivamente la sostituzione $\sqrt{\frac{t}{1-t}} = s$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{3}{2}Ax}}{\sqrt{1-e^{-Ax}}} dx = \frac{1}{A}\int_0^1 \sqrt{\frac{t}{1-t}} dt = \frac{2}{A}\int_0^{+\infty} \frac{s^2}{(1+s^2)^2} ds.$$

Poiché

$$\int \frac{s^2}{(1+s^2)^2} ds = -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1+s^2}\right)' s ds = -\frac{s}{2(1+s^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+s^2} ds = -\frac{s}{2(1+s^2)} + \frac{1}{2}\arctan s + c$$

risulta

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{e^{\frac{3}{2}Ax}}{\sqrt{1-e^{-Ax}}} dx &= \lim_{s\to+\infty}\left(-\frac{s}{A(1+s^2)} + \frac{1}{A}\arctan s\right) \\ &\quad - \lim_{s\to 0^+}\left(-\frac{s}{A(1+s^2)} + \frac{1}{A}\arctan s\right) \\ &= \frac{\pi}{2A}.\end{aligned}$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 5. [5 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{y(A^2 - x^2)} \\ y(0) = -A \end{cases}.$$

$[A = 4, 3, 2, 1]$

Svolgimento: L'equazione differenziale è a variabili separabili:

$$\int y dy = \int \frac{1}{A - x^2} dx.$$

Risolviamo il primo integrale:

$$\int y dy = \frac{y^2}{2} + c.$$

Risolviamo il secondo integrale:

$$\int \frac{1}{A^2 - x^2} dx = \frac{1}{2A} \int \left(\frac{1}{A - x} + \frac{1}{A + x} \right) dx = \frac{1}{2A} \log \frac{|A + x|}{|A - x|} = \frac{1}{2A} \log \frac{A + x}{A - x}.$$

Pertanto

$$\frac{y^2}{2} = \frac{1}{2A} \log \frac{A + x}{A - x} + c.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = -A$ si ottiene $c = \frac{A^2}{2}$. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = -\sqrt{\frac{1}{A} \log \frac{A + x}{A - x} + A^2}.$$