

Università di Roma “Tor Vergata” – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 29/01/2020

Cognome: (in STAMPATELLO)
Nome: (in STAMPATELLO)
Matricola:
Titolare del corso:
Esame orale:

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [4 punti] Calcolare lo sviluppo di Taylor dell'ordine $n = 6$ con centro $x_0 = 0$ per la seguente funzione:

$$f(x) = \sin(e^{ax^2} - \cos(\sqrt{2}x)), \quad f(x) = \sin(\cos(\sqrt{2}x) - e^{ax^2}).$$

$[a = 1, -2]$

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y \rightarrow 0$:

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3), \quad \cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} - \frac{y^6}{720} + o(y^7), \quad \sin y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^4).$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} e^{ax^2} - \cos(\sqrt{2}x) &= 1 + ax^2 + \frac{a^2}{2}x^4 + \frac{a^3}{6}x^6 - 1 + x^2 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{90}x^6 + o(x^6) \\ &= (1+a)x^2 + \frac{3a^2-1}{6}x^4 + \frac{1+15a^3}{90}x^6 + o(x^6) \end{aligned}$$

da cui segue

$$\begin{aligned} \sin(e^{ax^2} - \cos(\sqrt{2}x)) &= (1+a)x^2 + \frac{3a^2-1}{6}x^4 + \frac{1+15a^3}{90}x^6 - \frac{1}{6}\left((1+a)x^2 + o(x^3)\right)^3 + o(x^6) \\ &= (1+a)x^2 + \frac{3a^2-1}{6}x^4 + \frac{-14-45a(a+1)}{90}x^6 + o(x^6) \end{aligned}$$

Esercizio 2. [7 punti] Data la funzione

$$f(x) = \frac{\left(x + \cos \sqrt{2x}\right)^{\frac{a}{x}} - 1}{\log(1+x)}(ax+b),$$

calcolare $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$[(a, b) = (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 1)]$

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y \rightarrow 0$:

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2), \quad \cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + o(y^5).$$

Per $x \rightarrow 0^+$ si ha:

$$x + \cos \sqrt{2x} = x + 1 - x + \frac{x^2}{6} + o(x^2) = 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

da cui segue

$$\begin{aligned} \left(x + \cos \sqrt{2x}\right)^{\frac{a}{x}} &= \left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)^{\frac{a}{x}} = e^{\frac{a}{x} \log(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2))} = e^{\frac{a}{x} (\frac{x^2}{6} + o(x^2))} \\ &= e^{\frac{a}{6}x + o(x)} = 1 + \frac{a}{6}x + o(x). \end{aligned}$$

Pertanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{a}{6}x + o(x)}{x + o(x)}(b + o(1)) = \frac{ab}{6}.$$

D'altra parte, per $x \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned} \left(x + \cos \sqrt{2x}\right)^{\frac{a}{x}} &= x^{\frac{a}{x}} \left(1 + \frac{\cos \sqrt{2x}}{x}\right)^{\frac{a}{x}} = e^{a \frac{\log x}{x}} e^{\frac{a}{x} \log(1 + \frac{\cos \sqrt{2x}}{x})} \\ &= \left(1 + a \frac{\log x}{x} + o\left(\frac{\log x}{x}\right)\right) \left(1 + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= 1 + a \frac{\log x}{x} + o\left(\frac{\log x}{x}\right), \end{aligned}$$

$$\log(1+x) = \log x + \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \log x + o(\log x), \quad ax+b = ax + o(x).$$

Pertanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a \frac{\log x}{x} + o\left(\frac{\log x}{x}\right)}{\log x + o(\log x)}(ax + o(x)) = a^2.$$

Esercizio 3. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \log |(a+1)e^x - ae^{2x}|$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$$[a = 2, 3, 4, 5]$$

Svolgimento: Dominio: $\{x \in \mathbb{R} \mid (a+1)e^x - ae^{2x} \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\log \frac{a+1}{a}\}$.

$$\lim_{x \rightarrow (\log \frac{a+1}{a})^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (\log \frac{a+1}{a})^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$f(x) = \log((a+1)e^x - ae^{2x}) = x + \log((a+1) - ae^x) = x + \log(a+1) \text{ per } x \rightarrow -\infty.$$

$$f(x) = \log(ae^{2x} - (a+1)e^x) = 2x + \log(a - (a+1)e^{-x}) = 2x + \log a \text{ per } x \rightarrow +\infty.$$

$$x = \log \frac{a+1}{a} \text{ asintoto verticale.}$$

$$y = x + \log(a+1) \text{ asintoto obliquo a } -\infty, \quad y = 2x + \log a \text{ asintoto obliquo a } +\infty.$$

Per $x \neq \log \frac{a+1}{a}$: $f'(x) = \frac{(a+1)e^x - 2ae^{2x}}{(a+1)e^x - ae^{2x}}$, pertanto f è crescente per $x \leq \log \frac{a+1}{2a}$ e per $x > \log \frac{a+1}{a}$ e f è decrescente per $\log \frac{a+1}{2a} \leq x < \log \frac{a+1}{a}$.

$$x = \log \frac{a+1}{2a} \text{ punto di massimo relativo, } f(\log \frac{a+1}{2a}) = \log \frac{(a+1)^2}{4a}.$$

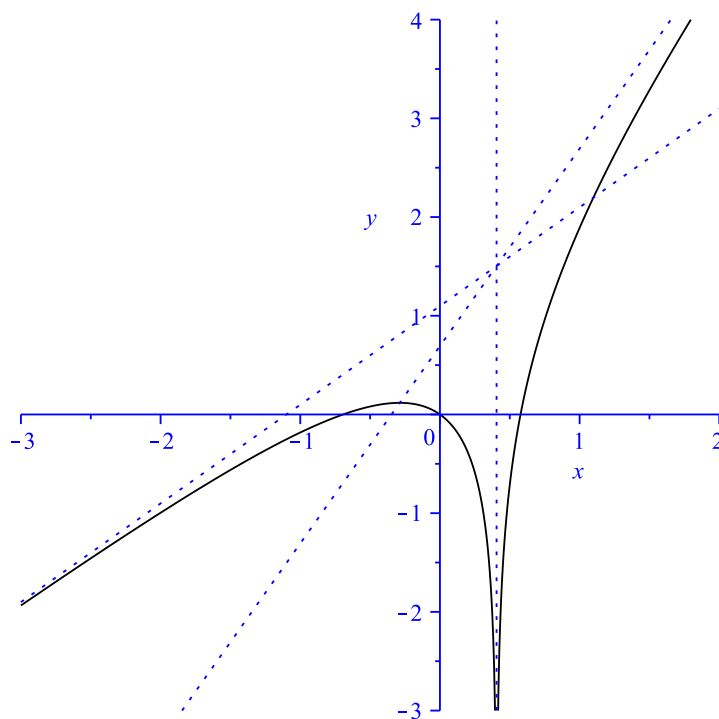


FIGURA 1. Caso $a = 2$: grafico di $f(x) = \log |3e^x - 2e^{2x}|$.

Esercizio 4. [6 punti] Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{1/a} \sqrt{x} \arcsin(1 - ax) dx, \quad \left[\int_0^{1/a} \sqrt{x} \arcsin(ax - 1) dx \right].$$

$$[a = 4, 2]$$

Svolgimento: Integrando per parti si ha:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x} \arcsin(1 - ax) dx &= \int \left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right)' \arcsin(1 - ax) dx \\ &= \frac{2}{3} x^{3/2} \arcsin(1 - ax) - \frac{2}{3} \int x^{3/2} \frac{-a}{\sqrt{1 - (1 - ax)^2}} dx = \\ &= \frac{2}{3} x^{3/2} \arcsin(1 - ax) - \frac{2}{3\sqrt{a}} \int \frac{-ax}{\sqrt{2 - ax}} dx \\ &= \frac{2}{3} x^{3/2} \arcsin(1 - ax) - \frac{2}{3\sqrt{a}} \int \left(\sqrt{2 - ax} - \frac{2}{\sqrt{2 - ax}} \right) dx \\ &= \frac{2}{3} x^{3/2} \arcsin(1 - ax) + \frac{4}{9a\sqrt{a}} (2 - ax)^{3/2} - \frac{8}{3a\sqrt{a}} \sqrt{2 - ax} + c \end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_0^{1/a} \sqrt{x} \arcsin(1 - ax) dx = \frac{4}{9a\sqrt{a}} - \frac{8}{3a\sqrt{a}} - \frac{8\sqrt{2}}{9a\sqrt{a}} + \frac{8\sqrt{2}}{3a\sqrt{a}} = -\frac{20}{9a\sqrt{a}} + \frac{16\sqrt{2}}{9a\sqrt{a}}.$$

Esercizio 5. [5 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{y^2 e^{-x}}{\sqrt{a + e^{-x}}} \\ y(0) = \frac{1}{1 + 2b} \end{cases}.$$

$$[(a, b) = (3, 2), (8, 3), (1, \sqrt{2}), (2, \sqrt{3})]$$

Svolgimento: L'equazione differenziale è a variabili separabili:

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int \frac{e^{-x}}{\sqrt{a + e^{-x}}} dx.$$

Risolviamo il primo integrale:

$$\int \frac{1}{y^2} dy = -\frac{1}{y} + c.$$

Risolviamo il secondo integrale: con la sostituzione $e^{-x} = t$ si ha

$$\int \frac{e^{-x}}{\sqrt{a + e^{-x}}} dx = - \int \frac{1}{\sqrt{a + t}} dt = -2\sqrt{a + t} + c = -2\sqrt{a + e^{-x}} + c.$$

Pertanto

$$-\frac{1}{y} = -2\sqrt{a + e^{-x}} + c.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = \frac{1}{1+2b}$ si ottiene $c = -1 - 2b + 2\sqrt{a+1}$. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{1}{2\sqrt{a + e^{-x}} + 1 + 2b - 2\sqrt{a + 1}}.$$