

Università di Roma “Tor Vergata” – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 27/01/2021 – III

Cognome: (in STAMPATELLO)
Nome: (in STAMPATELLO)
Matricola:
Titolare del corso:
Esame orale:

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [8 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(e^{ax^2} - ax \arctan x \right)^{-\frac{1}{ax^4}}.$$

$[a = 2, -2, 4, -4]$

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y \rightarrow 0$:

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3), \quad \log(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2), \quad \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4).$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \log \left(e^{ax^2} - ax \arctan x \right) &= \log \left(1 + ax^2 + \frac{a^2}{2}x^4 - ax^2 + \frac{a}{3}x^4 + o(x^5) \right) \\ &= \log \left(1 + \frac{3a+2}{6}ax^4 + o(x^5) \right) \\ &= \frac{3a+2}{6}ax^4 + o(x^5) \end{aligned}$$

da cui segue

$$\left(e^{ax^2} - ax \arctan x \right)^{-\frac{1}{ax^4}} = \exp \left(-\frac{1}{ax^4} \log \left(e^{ax^2} - ax \arctan x \right) \right) = \exp \left(-\frac{3a+2}{6} + o(x) \right).$$

Si conclude che il limite richiesto vale

$$e^{-\frac{3a+2}{6}}.$$

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = (x^2 - a^2) \log(|x^2 - a^2|) - x^2$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$$[a = \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}]$$

Svolgimento: f è pari. Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{-a, a\}$.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -a^2.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

f non ammette asintoti a $+\infty$ e $-\infty$.

Per $0 \leq x < a$ e $x > a$: $f'(x) = 2x \log(|x^2 - a^2|) + 2x - 2x = 2x \log(|x^2 - a^2|)$, pertanto f è crescente per $0 < x \leq \sqrt{a^2 - 1}$ e $x \geq \sqrt{a^2 + 1}$ e f è decrescente per $\sqrt{a^2 - 1} \leq x \leq \sqrt{a^2 + 1}$.

$x = \sqrt{a^2 - 1}$ punto di massimo relativo, $x = 0$ e $x = \sqrt{a^2 + 1}$ punti di minimo relativo.

$$f(\sqrt{a^2 - 1}) = 1 - a^2, \quad f(\sqrt{a^2 + 1}) = -a^2 - 1.$$

Infine:

$$\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} 2x \log(|x^2 - a^2|) = -\infty.$$

$x = -a, x = a$ punti di cuspid.

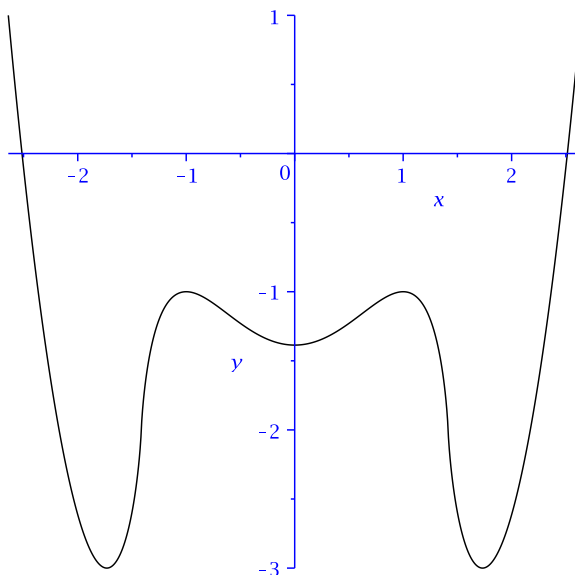


FIGURA 1. Grafico di $f(x) = (x^2 - 2) \log(|x^2 - 2|) - x^2$.

Esercizio 3. [8 punti] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2a}} \frac{\sin(ax)}{(\cos(ax) + \sin^2(ax) - 1)^\alpha} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento: Riscriviamo l'integrale nella forma

$$\int_0^{\frac{\pi}{2a}} \frac{\sin(ax)}{(\cos(ax) + \sin^2(ax) - 1)^\alpha} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2a}} \frac{\sin(ax)}{(\cos(ax) - \cos^2(ax))^\alpha} dx.$$

Risulta:

$$f(x) = \frac{\sin(ax)}{(\cos(ax))^\alpha (1 - \cos(ax))^\alpha} \sim 2^\alpha \frac{ax}{(ax)^{2\alpha}} = \frac{2^\alpha}{(ax)^{2\alpha-1}} \text{ per } x \rightarrow 0^+.$$

Quindi f è integrabile in $(0, \frac{\pi}{4a})$ se e solo se $\alpha < 1$. D'altra parte

$$f(x) = \frac{\sin(ax)}{(\cos(ax))^\alpha (1 - \cos(ax))^\alpha} \sim \frac{1}{(\cos(ax))^\alpha} = \frac{1}{(\sin(\frac{\pi}{2} - ax))^\alpha} \sim \frac{1}{a^\alpha (\frac{\pi}{2a} - x)^\alpha}.$$

Quindi f è integrabile in $(\frac{\pi}{4a}, \frac{\pi}{2a})$ se e solo se $\alpha < 1$.

Calcoliamo l'integrale per $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2a}} \frac{\sin(ax)}{\sqrt{\cos(ax) - \cos^2(ax)}} dx.$$

Con la sostituzione $\cos(ax) = t$ e, successivamente, $\sqrt{t} = s$, l'integrale diventa:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2a}} \frac{\sin(ax)}{\sqrt{\cos(ax) - \cos^2(ax)}} dx = \frac{1}{a} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t - t^2}} dt = \frac{2}{a} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}} ds.$$

Essendo $\int \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} ds = \arcsin s + c$ si deduce

$$\int_0^{\frac{\pi}{2a}} \frac{\sin(ax)}{\sqrt{\cos(ax) - \cos^2(ax)}} dx = \frac{\pi}{a}.$$

Esercizio 4. [6 punti] Calcolare lo sviluppo di Taylor dell'ordine $n = 4$ con centro $x_0 = \pm \frac{\pi}{2a}$ per la seguente funzione:

$$f(x) = \frac{1}{\sin(ax)}.$$

$$[a = 1, 2]$$

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y \rightarrow 0^+$:

$$\cos(y) = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + o(y^5), \quad \frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 + o(y^2).$$

Posto $y = x - (\pm \frac{\pi}{2a})$:

$$f(x) = \frac{1}{\sin(ax)} = \frac{1}{\sin(ay \pm \frac{\pi}{2})} = \pm \frac{1}{\cos(ay)}.$$

Per $y \rightarrow 0$ risulta

$$\cos(ay) = 1 - \frac{a^2}{2}y^2 + \frac{a^4}{24}y^4 + o(y^5)$$

da cui segue

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos(ay)} &= \frac{1}{1 - \frac{a^2}{2}y^2 + \frac{a^4}{24}y^4 + o(y^5)} = 1 + \frac{a^2}{2}y^2 - \frac{a^4}{24}y^4 + \left(-\frac{a^2}{2}y^2 + o(y^3)\right)^2 + o(y^5) \\ &= 1 + \frac{a^2}{2}y^2 - \frac{a^4}{24}y^4 + \frac{a^4}{4}y^4 + o(y^5) = 1 + \frac{a^2}{2}y^2 + \frac{5}{24}a^4y^4 + o(y^5). \end{aligned}$$

Si deduce che, per $x \rightarrow \pm \frac{\pi}{2a}$:

$$f(x) = \pm 1 \pm \frac{a^2}{2} \left(x \mp \frac{\pi}{2a}\right)^2 \pm \frac{5}{24} a^4 \left(x \mp \frac{\pi}{2a}\right)^4 + o\left(\left(x \mp \frac{\pi}{2a}\right)^5\right).$$