

Università di Roma “Tor Vergata” – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 27/01/2021 – II

Cognome: (in STAMPATELLO)
Nome: (in STAMPATELLO)
Matricola:
Titolare del corso:
Esame orale:

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [8 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sin \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{a}{\sqrt{n^3}} \right) - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \left((n+1)^{\frac{5}{2}} - n^{\frac{5}{2}} \right)$$

$$[a = \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$$

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y \rightarrow 0^+$:

$$\sin y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^4), \quad (1+y)^{\frac{5}{2}} = 1 + \frac{5}{2}y + o(y).$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \sin \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{a}{\sqrt{n^3}} \right) &= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{a}{\sqrt{n^3}} - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{a}{\sqrt{n^3}} \right)^3 + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{a}{\sqrt{n^3}} - \frac{1}{6\sqrt{n^3}} + o \left(\frac{1}{n^2} \right), \end{aligned}$$

da cui segue

$$\sin \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{a}{\sqrt{n^3}} \right) - \frac{1}{\sqrt{n}} = -\frac{6a+1}{6} \frac{1}{\sqrt{n^3}} + o \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

D'altra parte

$$(n+1)^{\frac{5}{2}} - n^{\frac{5}{2}} = n^{\frac{5}{2}} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{5}{2}} - n^{\frac{5}{2}} = n^{\frac{5}{2}} \left(1 + \frac{5}{2n} + o \left(\frac{1}{n} \right) \right) - n^{\frac{5}{2}} = \frac{5\sqrt{n^3}}{2} + o \left(\sqrt{n^3} \right).$$

Si conclude che il limite richiesto vale

$$-\frac{5(6a+1)}{12}.$$

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$e^{\pm \frac{1}{2x}} \sqrt{x^2 \pm x}, \quad \left[e^{\pm \frac{1}{x}} \sqrt{x^2 \pm 2x} \right]$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Svolgimento: Consideriamo la funzione

$$e^{\frac{1}{2x}} \sqrt{x^2 + x}.$$

Dominio: $\{x \leq -1\} \cup \{x > 0\}$. Inoltre

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \leq -1, \forall x > 0, \quad f(x) = 0 \iff x = -1.$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

$x = 0$ asintoto verticale.

Per $x \rightarrow +\infty$ si ha:

$$f(x) = x e^{\frac{1}{2x}} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = x \left(1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \left(1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) = x + 1 + o(1).$$

D'altra parte, per $x \rightarrow -\infty$:

$$f(x) = -x e^{\frac{1}{2x}} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = -x \left(1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \left(1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) = -x - 1 + o(1).$$

$y = x + 1$ asintoto obliquo a $+\infty$, $y = -x - 1$ asintoto obliquo a $-\infty$.

Per $x < -1$ e $x > 0$: $f'(x) = e^{\frac{1}{2x}} \frac{2x^3 - x}{2x^2 \sqrt{x^2 + x}}$, pertanto f è decrescente per $x < -1$ e $0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ e f è crescente per $x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ punto di minimo relativo.

Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} e^{\frac{1}{2x}} \frac{2x^3 - x}{2x^2 \sqrt{x^2 + x}} = -\infty.$$

$x = -1$ punto di cuspid.

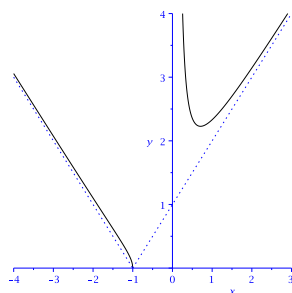


FIGURA 1. Grafico di $f(x) = e^{\frac{1}{2x}} \sqrt{x^2 + x}$.

Esercizio 3. [8 punti] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{\frac{1}{a}} \frac{\arcsin(1 - \sqrt{ax})}{\sqrt{x}(1 - ax)^\alpha} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 0$.

$[a = 2, 3, 5, 6]$

Svolgimento: Risulta:

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2\sqrt{x}} \text{ per } x \rightarrow 0^+.$$

Quindi f è integrabile in $(0, \frac{1}{2a})$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

D'altra parte

$$f \sim \sqrt{a} \frac{1 - \sqrt{ax}}{(1 - ax)^\alpha} = \frac{\sqrt{a}}{(1 + \sqrt{ax})(1 - ax)^{\alpha-1}} = \frac{1}{2a^{\alpha-\frac{3}{2}}(\frac{1}{a} - x)^{\alpha-1}} \text{ per } x \rightarrow \frac{1}{a}^-.$$

Quindi f è integrabile in $(\frac{1}{2a}, \frac{1}{a})$ se e solo se $\alpha < 2$.

Pertanto f è integrabile in $(0, \frac{1}{a})$ se e solo se $\alpha < 2$.

Calcoliamo l'integrale per $\alpha = 0$:

$$\int_0^{\frac{1}{a}} \frac{\arcsin(1 - \sqrt{ax})}{\sqrt{x}} dx.$$

Con la sostituzione $t = \sqrt{ax}$ e, successivamente, $1 - t = s$ l'integrale diventa:

$$\int_0^{\frac{1}{a}} \frac{\arcsin(1 - \sqrt{ax})}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{\sqrt{a}} \int_0^1 \arcsin(1 - t) dt = \frac{2}{\sqrt{a}} \int_0^1 \arcsin s ds.$$

Calcoliamo l'ultimo integrale integrando per parti:

$$\int \arcsin s ds = \int (s)' \arcsin s ds = s \arcsin s - \int \frac{s}{\sqrt{1-s^2}} ds = s \arcsin s + \sqrt{1-s^2} + c.$$

Si conclude:

$$\int_0^{\frac{1}{a}} \frac{\arcsin(1 - \sqrt{ax})}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{\sqrt{a}} \int_0^1 \arcsin s ds = \frac{1}{\sqrt{a}} (\pi - 2).$$

Esercizio 4. [6 punti] Risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione:

$$z^3|z| + 81 = 0 \quad \left(z^3|z| + 81i = 0, \quad z^3|z| + 16 = 0, \quad z^3|z| + 16i = 0 \right).$$

Svolgimento: Consideriamo l'equazione

$$z^3|z| + 81 = 0$$

e riscriviamola nella forma

$$z^3|z| = -81.$$

Uguagliando i moduli di ambo i membri si ha:

$$|z|^4 = 81 \iff |z| = 3.$$

Si deduce che le eventuali soluzioni sono della forma $z = 3e^{i\theta}$ da cui, sostituendo nell'equazione,

$$81e^{3i\theta} + 81 = 0$$

da cui segue

$$e^{3i\theta} = -1 = e^{i\pi}.$$

Pertanto

$$\theta = \frac{\pi}{3}(2k+1), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Si conclude che le soluzioni dell'equazione sono

$$z = 3e^{i\frac{\pi}{3}(2k+1)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ovvero

$$z = 3e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{2}(1 + \sqrt{3}i), \quad z = 3e^{i\pi} = -3, \quad z = 3e^{i\frac{5}{3}\pi} = \frac{3}{2}(1 - \sqrt{3}i).$$