

Università di Roma “Tor Vergata” – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 27/01/2021 – I

Cognome: (in STAMPATELLO)
Nome: (in STAMPATELLO)
Matricola:
Titolare del corso:
Esame orale:

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [8 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+bx)^{1+bx} - \sqrt{1+2bx}}{ax^2 + \log(1+x^3)}.$$

$[(a, b) = (1, 2), (-1, 2), (2, 1), (2, -1)]$

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y \rightarrow 0^+$:

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2), \quad e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2), \quad \sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + o(y^2).$$

Pertanto

$$\begin{aligned} (1+bx)^{1+bx} &= \exp\left((1+bx)\log(1+bx)\right) = \exp\left((1+bx)\left(bx - \frac{b^2x^2}{2} + o(x^2)\right)\right) \\ &= \exp\left(bx + \frac{b^2x^2}{2} + o(x^2)\right) = 1 + bx + \frac{b^2x^2}{2} + \frac{1}{2}(bx + o(x))^2 + o(x^2) \\ &= 1 + bx + b^2x^2 + o(x^2), \end{aligned}$$

$$\sqrt{1+2bx} = 1 + bx - \frac{1}{8}(4b^2x^2) + o(x^2) = 1 + bx - \frac{b^2x^2}{2} + o(x^2),$$

da cui segue

$$(1+bx)^{1+bx} - \sqrt{1+2bx} = \frac{3}{2}b^2x^2 + o(x^2).$$

D'altra parte

$$ax^2 + \log(1+x^3) = ax^2 + o(x^2).$$

Si conclude che il limite richiesto vale

$$\frac{3b^2}{2a}.$$

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = 2ax - \log(|e^{ax} - 1|)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$$[a = (2, 3, 4, 5)]$$

Svolgimento: Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty.$$

$x = 0$ asintoto verticale.

Per $x \rightarrow +\infty$ si ha:

$$f(x) = 2ax - \log(e^{ax} - 1) = 2ax - ax - \log(1 - e^{-ax}) = ax + o(1).$$

D'altra parte, per $x \rightarrow -\infty$:

$$f(x) = 2ax - \log(1 - e^{ax}) = 2ax + o(1).$$

$y = ax$ asintoto obliquo a $+\infty$, $y = 2ax$ asintoto obliquo a $-\infty$.

Per $x \neq 0$: $f'(x) = 2a - a \frac{e^{ax}}{e^{ax} - 1}$, pertanto f è crescente per $x < 0$ e $x \geq \frac{\log 2}{a}$. e f è decrescente per $0 < x \leq \frac{\log 2}{a}$.

$x = \frac{\log 2}{a}$ punto di minimo relativo, $f\left(\frac{\log 2}{a}\right) = 2 \log 2$.

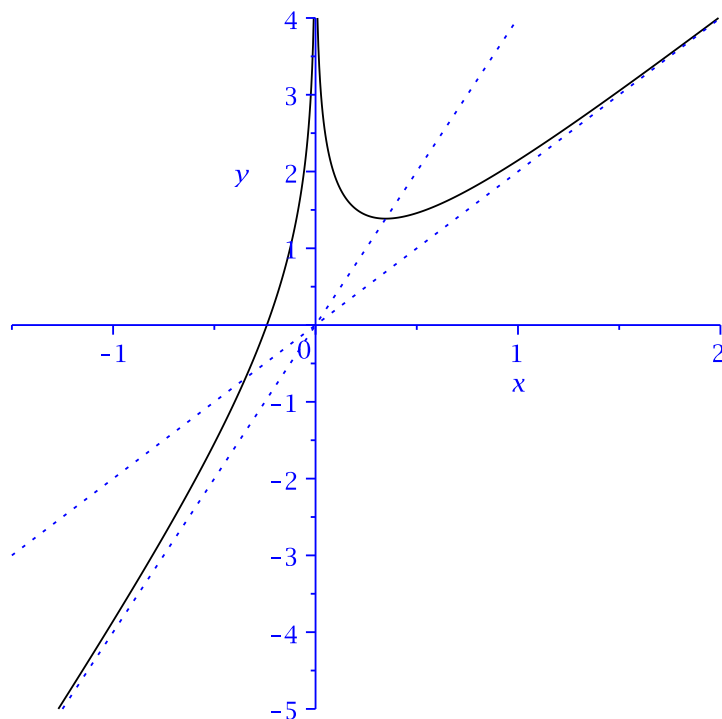


FIGURA 1. Grafico di $f(x) = 4x - \log(|e^{2x} - 1|)$.

Esercizio 3. [8 punti] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{2\alpha x}}{\sqrt{|1 - e^{\alpha x}|}} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = -a$.

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento: Risulta:

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{|\alpha|x}} \text{ per } x \rightarrow 0^+.$$

Quindi f è integrabile in $(0, 1)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

D'altra parte per $x \rightarrow +\infty$

$$f \sim e^{2\alpha x} \text{ se } \alpha < 0, \quad f \sim \frac{e^{2\alpha x}}{e^{\frac{\alpha}{2}x}} = e^{\frac{3}{2}\alpha x} \text{ se } \alpha > 0.$$

Quindi f è integrabile in $(1, +\infty)$ se e solo se $\alpha < 0$.

Pertanto f è integrabile in $(0, +\infty)$ se e solo se $\alpha < 0$. Calcoliamo l'integrale per $\alpha = -a$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2ax}}{\sqrt{1 - e^{-ax}}} dx.$$

Con la sostituzione $t = e^{-ax}$ l'integrale diventa:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2ax}}{\sqrt{1 - e^{-ax}}} dx = \frac{1}{a} \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t}} dt.$$

Calcoliamo l'ultimo integrale

$$\int \frac{t}{\sqrt{1-t}} dt = - \int \frac{1-t-1}{\sqrt{1-t}} dt = - \int \frac{1-t}{\sqrt{1-t}} dt + \int \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt = \frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{1-t} + c.$$

Si conclude:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2ax}}{\sqrt{1 - e^{-ax}}} dx = \frac{1}{a} \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t}} dt = \frac{1}{a} \lim_{t \rightarrow 1^-} \left(\frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{1-t} \right) + \frac{4}{3a} = \frac{4}{3a}.$$

Esercizio 4. [6 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y^2 \tan(ax) \\ y\left(\frac{\pi}{a}\right) = -a \end{cases}.$$

$$[a = 2, 3, 4, 5]$$

Svolgimento: L'equazione differenziale è a variabili separabili:

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int \tan(ax) dx.$$

Risolviamo il primo integrale:

$$\int \frac{1}{y^2} dy = -\frac{1}{y} + c.$$

Risolviamo il secondo integrale:

$$\int \tan(ax) dx = \int \frac{\sin(ax)}{\cos(ax)} dx = -\frac{1}{a} \log |\cos(ax)| + c.$$

Pertanto:

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{a} \log |\cos(ax)| + c.$$

Imponendo la condizione iniziale $y\left(\frac{\pi}{a}\right) = -a$ si ottiene: $\frac{1}{a} = c$. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{a}{\log(-\cos(ax)) - 1}.$$