

Università di Roma “Tor Vergata” – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 20/02/2019

Cognome: (in STAMPATELLO)
Nome: (in STAMPATELLO)
Matricola:
Titolare del corso:

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

a/b/c/d

Esercizio 1. [5 punti] Calcolare lo sviluppo di Taylor dell'ordine $n = 5$ nel punto $x_0 = \frac{\pi}{2}$ per la seguente funzione:

$$f(x) = (A \sin x - B \cos x)(2x - \pi).$$

$[(A, B) = (1, 3), (3, 1), (1, 6), (6, 1)]$

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y \rightarrow 0$:

$$\sin y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^4), \quad \cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + o(y^5).$$

Posto $y = x - \frac{\pi}{2}$:

$$f(x) = (A \sin x - B \cos x)(2x - \pi) = 2y \left(A \sin \left(y + \frac{\pi}{2} \right) - B \cos \left(y + \frac{\pi}{2} \right) \right) = 2y(A \cos y + B \sin y).$$

Per $y \rightarrow 0$ risulta:

$$2y(A \cos y + B \sin y) = 2y \left(A - \frac{A}{2}y^2 + \frac{A}{24}y^4 + By - \frac{B}{6}y^3 + o(y^4) \right) = 2Ay + 2By^2 - Ay^3 - \frac{B}{3}y^4 + \frac{A}{12}y^5 + o(y^5).$$

Pertanto, per $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ si ha

$$f(x) = 2A \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + 2B \left(x - \frac{\pi}{2} \right)^2 - A \left(x - \frac{\pi}{2} \right)^3 - \frac{B}{3} \left(x - \frac{\pi}{2} \right)^4 + \frac{A}{12} \left(x - \frac{\pi}{2} \right)^5 + o \left(\left(x - \frac{\pi}{2} \right)^5 \right).$$

Esercizio 2. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n^2 \cos^n \left(\frac{1}{n} + \frac{A}{n^2} \right) - \frac{2n^3}{2n+1} \right).$$

$[A = 1, 2, 3, 4]$

Svolgimento: Si ha:

$$\begin{aligned} \cos^n \left(\frac{1}{n} + \frac{A}{n^2} \right) &= \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{A}{n^2} \right)^2 + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right)^n \\ &= \left(1 - \frac{1}{2n^2} - \frac{A}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right)^n = \exp \left(n \log \left(1 - \frac{1}{2n^2} - \frac{A}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \right) \\ &= \exp \left(n \left(-\frac{1}{2n^2} - \frac{A}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \right) = \exp \left(-\frac{1}{2n} - \frac{A}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2n} - \frac{A}{n^2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2n} - \frac{A}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1-8A}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

D'altra parte

$$\frac{2n^3}{2n^2+n} = n^2 \frac{1}{1+\frac{1}{2n}} = n^2 \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = n^2 - \frac{n}{2} + \frac{1}{4} + o(1)$$

Pertanto

$$\begin{aligned} n^2 \cos^n \left(\frac{1}{n} + \frac{A}{n^2} \right) - \frac{2n^3}{2n^2+n} &= n^2 \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1-8A}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) - n^2 + \frac{n}{2} - \frac{1}{4} + o(1) \\ &= -\frac{1}{8} - A + o(1). \end{aligned}$$

Il limite richiesto vale $-\frac{1}{8} - A$.

Esercizio 3. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \arctan(A - x - 2 - \log |A - x|)$$

specificando: dominio, eventuali asymptoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$$[A = 5, 6, 3, 4]$$

Svolgimento: Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{A\}$.

$$\lim_{x \rightarrow A^+} f(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow A^-} f(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

$$y = \frac{\pi}{2} \text{ asintoto orizzontale a } -\infty, y = -\frac{\pi}{2} \text{ asintoto orizzontale a } +\infty.$$

Per $x \neq A$: $f'(x) = \frac{1}{1+(A-x-2-\log|A-x|)^2} \left(-1 + \frac{1}{A-x} \right)$, pertanto f è crescente per $A-1 \leq x < A$ e f è decrescente per $x \leq A-1$ e per $x > A$.

Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow A^-} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow A^+} f'(x) = -\infty.$$

$$x = A - 1 \text{ punto di minimo relativo, } f(A - 1) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

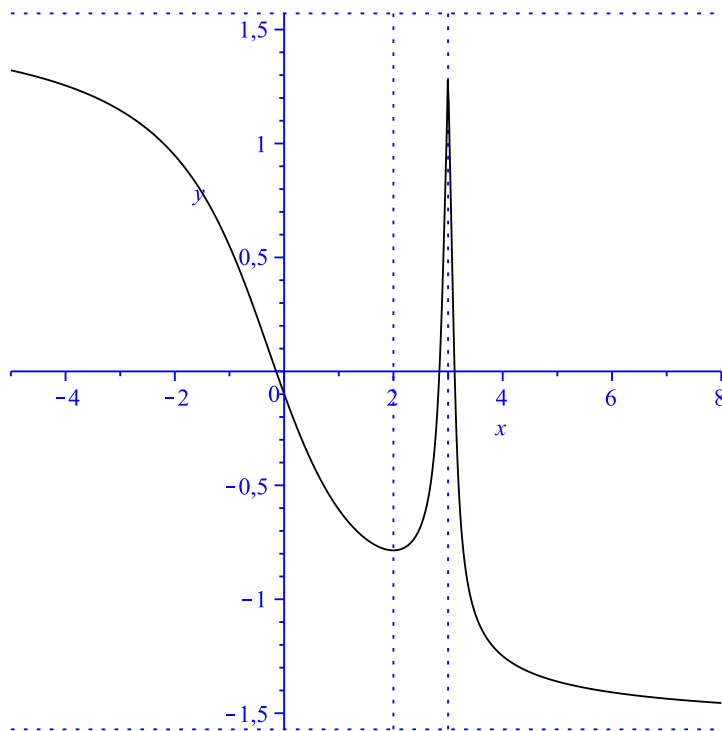


FIGURA 1. Caso $A = 3$: grafico di $f(x) = \arctan(1 - x - \log(|3 - x|))$.

Esercizio 4. [7 punti] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_A^{+\infty} \frac{\log(x-A+1)(\arctan(x-A))^{2\alpha-1}}{(x-A)^{5\alpha-1}} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

$[A = 4, 3, 2, 1]$.

Svolgimento: Risulta:

$$f \sim (x-A)^{1-3\alpha} \text{ per } x \rightarrow A^+,$$

Segue che f è integrabile in $(A, A+1)$ se e solo se $\alpha < \frac{2}{3}$. D'altra parte

$$f(x) \sim \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\alpha-1} \frac{\log x}{x^{5\alpha-1}}.$$

Segue che f è integrabile in $(A+1, +\infty)$ se e solo se $\alpha > \frac{2}{5}$. Pertanto f è integrabile in $(A, +\infty)$ se e solo se $\frac{2}{5} < \alpha < \frac{2}{3}$. Calcoliamo l'integrale per $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\int_a^{+\infty} \frac{\log(x+1)}{(x-A)^{3/2}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\log(x+1)}{x^{3/2}} dx.$$

Integrando per parti, e usando poi la sostituzione $\sqrt{x} = t$,:

$$\begin{aligned} \int \frac{\log(x+1)}{x^{3/2}} dx &= -2 \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' \log(x+1) dx \\ &= -\frac{2}{\sqrt{x}} \log(x+1) + \int \frac{2}{\sqrt{x}(x+1)} dx \\ &= -\frac{2}{\sqrt{x}} \log(x+1) + 4 \int \frac{1}{t^2+1} dt \\ &= -\frac{2}{\sqrt{x}} \log(x+1) + 4 \arctan t + c \\ &= -\frac{2}{\sqrt{x}} \log(x+1) + 4 \arctan \sqrt{x} + c. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \int_A^{+\infty} \frac{\log(x-A+1)}{(x-A)^{3/2}} dx &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{\sqrt{x}} \log(x+1) + 4 \arctan \sqrt{x} \right) \\ &\quad - \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{2}{\sqrt{x}} \log(x+1) + 4 \arctan \sqrt{x} \right) \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Esercizio 5. [5 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + \frac{1}{A + \sqrt{x}} y = \frac{(A + \sqrt{x})^{2A}}{\sqrt{x}} \\ y(1) = 0 \end{cases}.$$

$$[A = 4, 3, 2, 1]$$

Svolgimento: L'equazione differenziale è lineare del I ordine. Cerchiamo una primitiva della funzione $\frac{1}{A + \sqrt{x}}$: con la sostituzione $\sqrt{x} = t$

$$\int \frac{1}{A + \sqrt{x}} dx = \int \frac{2t}{A + t} dt = 2t - 2A \int \frac{1}{A + t} dt = 2t - 2A \log |A + t| = 2\sqrt{x} - 2A \log(A + \sqrt{x}).$$

Cerchiamo una primitiva della funzione $\frac{(A + \sqrt{x})^{2A}}{\sqrt{x}} e^{2\sqrt{x} - 2A \log(A + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{2\sqrt{x}}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{2\sqrt{x}} dx = e^{2\sqrt{x}}.$$

Si deduce:

$$y(x) = e^{-2\sqrt{x} + 2A \log(A + \sqrt{x})} (c + e^{2\sqrt{x}}) = (A + \sqrt{x})^{2A} (c e^{-2\sqrt{x}} + 1),$$

da cui, imponendo la condizione iniziale $y(1) = 0$ si determina la costante c :

$$c = -e^2.$$

Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = (A + \sqrt{x})^{2A} (1 - e^{2(1 - \sqrt{x})}).$$