

Esercizio 1. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\log \left(e + \frac{1}{n^2} \right) - \cos \left(\frac{a}{n} \right) \right).$$

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y \rightarrow 0$:

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + o(y^3), \quad \log(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2), \quad e^y = 1 + y + o(y).$$

Si ha:

$$\log \left(e + \frac{1}{n^2} \right) - \cos \left(\frac{a}{n} \right) = 1 + \log \left(1 + \frac{1}{en^2} \right) - \cos \left(\frac{a}{n} \right) = 1 + \frac{1}{en^2} - \left(1 - \frac{a^2}{2n^2} \right) + o\left(\frac{1}{n^2} \right) = \frac{2 + ea^2}{2en^2} + o\left(\frac{1}{n^2} \right)$$

da cui segue

$$n^2 \left(\log \left(e + \frac{1}{n^2} \right) - \cos \left(\frac{a}{n} \right) \right) = \frac{2 + ea^2}{2e} + o(1).$$

Pertanto il limite richiesto vale

$$\frac{2 + ea^2}{2e}.$$

Esercizio 2. Determinare il dominio della seguente funzione

$$f(x) = \arcsin \left(\frac{x^2 - |x \pm 2|}{x^2 + 2} \right), \quad \left[f(x) = \arcsin \left(\frac{|x \pm 2| - x^2}{x^2 + 2} \right) \right].$$

Svolgimento: Consideriamo la funzione

$$f(x) = \arcsin \left(\frac{x^2 - |x - 2|}{x^2 + 2} \right).$$

Dominio:

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq \frac{x^2 - |x - 2|}{x^2 + 2} \leq 1 \right\} = \left(-\infty, -\frac{1}{2} \right] \cup [0, +\infty).$$

Infatti:

$$-1 \leq \frac{x^2 - |x - 2|}{x^2 + 2} \leq 1 \iff -x^2 - 2 \leq x^2 - |x - 2| \leq x^2 + 2 \iff -2x^2 - 2 \leq -|x - 2| \leq 2$$

$$-2 \leq |x - 2| \leq 2x^2 + 2 \iff |x - 2| \leq 2x^2 + 2 \iff \begin{cases} x \geq 2 \\ x - 2 \leq 2x^2 + 2 \end{cases} \cup \begin{cases} x \leq 2 \\ 2 - x \leq 2x^2 + 2 \end{cases}$$

$$\iff \{x \geq 2\} \cup \begin{cases} x \leq 2 \\ x \leq -\frac{1}{2} \text{ e } x \geq 0 \end{cases} \iff \{x \geq 2\} \cup \left\{ x \leq -\frac{1}{2} \right\} \cup \{0 \leq x \leq 2\} \iff \left\{ x \leq -\frac{1}{2} \right\} \cup \{x \geq 0\}.$$

Esercizio 3. Determinare le primitive della funzione

$$f(x) = e^{-ax} \arctan(1 - e^{-ax})$$

e calcolare il seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \arctan(1 - e^{-ax}) dx.$$

$$[a = 2, 3, 4, 5]$$

Svolgimento: Risulta:

$$f \sim \frac{\pi}{4} e^{-ax} \text{ per } x \rightarrow +\infty.$$

Segue che f è integrabile in $(0, +\infty)$ (essendo $a > 0$).

Con la sostituzione $e^{-ax} = t$ e, successivamente, $1 - t = s$ si ha

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \arctan(1 - e^{-ax}) dx = \frac{1}{a} \int_0^1 \arctan(1 - t) dt = \frac{1}{a} \int_0^1 \arctan(s) ds.$$

Integrando per parti

$$\begin{aligned} \int \arctan(s) ds &= \int (s)' \arctan(s) ds = s \arctan(s) - \int \frac{s}{1 + s^2} ds \\ &= s \arctan(s) - \frac{1}{2} \log(1 + s^2) + c \end{aligned}$$

da cui segue

$$\begin{aligned} \int e^{-ax} \arctan(1 - e^{-ax}) dx &= (1 - t) \arctan(1 - t) - \frac{1}{2} \log(1 + (1 - t)^2) + c \\ &= (1 - e^{-ax}) \arctan(1 - e^{-ax}) - \frac{1}{2} \log(1 + (1 - e^{-ax})^2) + c. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \arctan(1 - e^{-ax}) dx = \frac{1}{a} \int_0^1 \arctan(s) ds = \frac{\pi}{4a} - \frac{1}{2a} \log 2.$$