Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 19/06/2019

Cognome: (in `STAMPATELLO`)	
Nome: (in `STAMPATELLO`)	
Matricola:	
Titolare del corso:	
Esame orale:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

a/b/c/d

Esercizio 1. [5 punti] Calcolare lo sviluppo di Taylor dell'ordine $n = 5$ con centro $x_0 = 1$ per la seguente funzione:

$$f(x) = A\cos\big(\pi(1+x^2)\big) + Bx.$$

$[(A,B) = (1,1), (1,2), (2,1), (2,2)]$

Svolgimento: Utilizziamo lo sviluppo di Taylor per $y \to 0$:

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + o(y^5).$$

Posto $y = x - 1$:

$$f(x) = A\cos\big(\pi(2+2y+y^2)\big) + By + B = A\cos\big(\pi(2y+y^2)\big) + By + B.$$

Per $y \to 0$ risulta:

$$\begin{aligned}
\cos\big(\pi(2y+y^2)\big) &= 1 - \frac{\pi^2(2y+y^2)^2}{2} + \frac{\pi^4(2y+y^2)^4}{24} + o(y^5)\\
&= 1 - \frac{\pi^2}{2}(4y^2+4y^3+y^4) + \frac{2}{3}\pi^4 y^4\Big(1+\frac{y}{2}\Big)^4 + o(y^5)\\
&= 1 - 2\pi^2y^2 - 2\pi^2y^3 + \Big(\frac{2}{3}\pi^4 - \frac{\pi^2}{2}\Big)y^4 + \frac{4}{3}\pi^4y^5 + o(y^5).
\end{aligned}$$

Pertanto, per $x \to 1$ si ha:

$$f(x) = A+B+B(x-1)-2A\pi^2(x-1)^2-2A\pi^2(x-1)^3+A\Big(\frac{2}{3}\pi^4-\frac{\pi^2}{2}\Big)(x-1)^4+\frac{4}{3}\pi^4A(x-1)^5+o((x-1)^5).$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. [6 punti] Data la funzione

$$f(x) = \left(2e^{Ax} - \log(1 + 2Ax) - 1\right)^{\frac{B}{x^2}}$$

calcolare $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

$[(A, B) = (2, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3)]$

Svolgimento: Per $x \to 0$ si ha:

$$\begin{aligned}
&\left(2e^{Ax} - \log(1 + 2Ax) - 1\right)^{\frac{B}{x^2}} \\
&= \left(2\left(1 + Ax + \frac{A^2}{2}x^2 + o(x^2)\right) - \left(2Ax - 2A^2x^2 + o(x^2)\right) - 1\right)^{\frac{B}{x^2}} \\
&= \left(1 + 3A^2x^2 + o(x^2)\right)^{\frac{B}{x^2}} = \exp\left(\frac{B}{x^2}\log\left(1 + 3A^2x^2 + o(x^2)\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{B}{x^2}\left(3A^2x^2 + o(x^2)\right)\right) = \exp\left(3A^2B + o(1)\right).
\end{aligned}$$

Pertanto $\lim_{x \to 0} f(x) = \exp\left(3A^2B\right)$. D'altra parte

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{AB}{x}} (2 + o(1))^{\frac{B}{x^2}} = 1.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$e^{-\frac{A}{x}} \cdot \sqrt{x^2 - 2Ax}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$[A = -1, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$.

Svolgimento: $\boxed{\text{CASO: } A > 0}$ Dominio: $\{x^2 - 2Ax \geq 0\} \setminus \{0\} = \{x < 0\} \cup \{x \geq 2A\}$.

$$f(x) \geq 0 \ \ \forall x \in D(f), \qquad f(2A) = 0,$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

$\boxed{x = 0 \text{ asintoto verticale.}}$

Inoltre

$$f(x) = e^{-\frac{A}{x}} x\sqrt{1 - \frac{2A}{x}} = x\Big(1 - \frac{A}{x} + o\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big)\Big(1 - \frac{A}{x} + o\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big) = x - 2A + o(1) \text{ per } x \to +\infty.$$

Analogamente

$$f(x) = -e^{-\frac{A}{x}} x\sqrt{1 - \frac{2A}{x}} = -x\Big(1 - \frac{A}{x} + o\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big)\Big(1 - \frac{A}{x} + o\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big) = -x + 2A + o(1) \text{ per } x \to -\infty.$$

$\boxed{y = x - 2A \text{ asintoto a } +\infty,\ y = -x + 2A \text{ asintoto a } -\infty.}$

Per $x < 0$ e $x > 2A$: $f'(x) = e^{-\frac{A}{x}} \frac{A(x^2-2Ax)+x^2(x-A)}{x^2\sqrt{x^2-2Ax}} = e^{-\frac{A}{x}} \frac{x^2-2A^2}{x\sqrt{x^2-2Ax}}$, pertanto f è crescente per $-\sqrt{2}A \leq x < 0$ e $x \geq 2A$ e f è decrescente per $x \leq -\sqrt{2}A$.

Inoltre

$$\lim_{x\to(2A)^+} f'(x) = +\infty.$$

$\boxed{x = -\sqrt{2}A,\ x = 2A \text{ punti di minimo relativo.}}$

$\boxed{x = 2A \text{ punto di cuspide.}}$

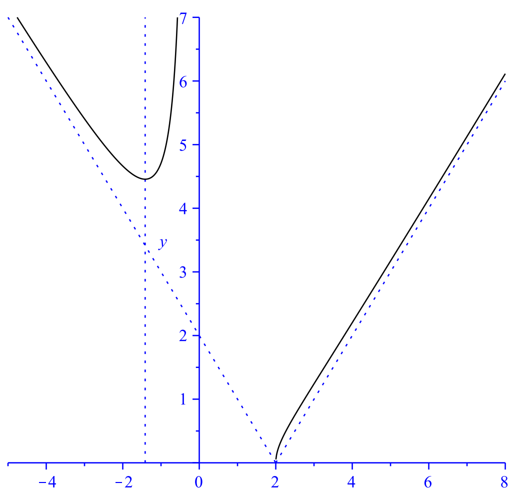

FIGURA 1. Caso $A = 1$: grafico di $f(x) = e^{-1/x}\sqrt{x^2 - 2x}$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 4. **[7 punti]** Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{2Ax}-1}{e^{\frac{3}{2}Ax}(e^{Ax}-e^{-Ax})^{\alpha}}dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = \frac{3}{2}$.

[$A = 2, 3, 4, 5$]

<u>*Svolgimento:*</u> Risulta:

$$f(x) \sim (2Ax)^{1-\alpha} \text{ per } x \to 0^+.$$

Segue che f è integrabile in $(0,1)$ se e solo se $\alpha < 2$. D'altra parte

$$f(x) \sim \frac{1}{e^{(\alpha-\frac{1}{2})Ax}} \text{ per } x \to +\infty.$$

Segue che f è integrabile in $(1,+\infty)$ se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$.
Pertanto f è integrabile in $(0,+\infty)$ se e solo se $\frac{1}{2} < \alpha < 2$.
Calcoliamo l'integrale per $\alpha = \frac{3}{2}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{2Ax}-1}{e^{\frac{3}{2}Ax}(e^{Ax}-e^{-Ax})^{\frac{3}{2}}}dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^{2Ax}-1}}dx.$$

Con la sostituzione $e^{2Ax} = t$ e, successivamente, $\sqrt{t-1} = s$,

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^{2Ax}-1}}dx = \frac{1}{A}\int_1^{+\infty} \frac{1}{2t\sqrt{t-1}}dt = \frac{1}{A}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+s^2}ds.$$

Poiché

$$\int \frac{1}{1+s^2}ds = \arctan s + c$$

risulta

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{2Ax}-1}{e^{\frac{3}{2}Ax}(e^{Ax}-e^{-Ax})^{\frac{3}{2}}}dx = \frac{1}{A}\lim_{s\to+\infty} \arctan s - \frac{1}{A}\lim_{s\to 0^+} \arctan s = \frac{\pi}{2A}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 5. [5 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = e^{-Ay} \arctan \sqrt{x+1} \\ y(-1) = B \end{cases}.$$

$[(A, B) = (2, 1), (1, 2), (2, -1), (1, -2)]$

Svolgimento: L'equazione differenziale è a variabili separabili:

$$\int e^{Ay} dy = \int \arctan \sqrt{x+1}\, dx.$$

Risolviamo il primo integrale:

$$\int e^{Ay} dy = \frac{e^{Ay}}{A} + c.$$

Risolviamo il secondo integrale: con la sostituzione $\sqrt{x+1} = t$ si ha:

$$\int \arctan \sqrt{x+1}\, dx = 2 \int t \arctan t dt = t^2 \arctan t - \int \frac{t^2}{1+t^2} dt = t^2 \arctan t - t + \arctan t + c$$
$$= (x+2) \arctan \sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} + c.$$

Pertanto

$$\frac{e^{Ay}}{A} = (x+2) \arctan \sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} + c.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(-1) = B$ si ottiene $c = \frac{e^{AB}}{A}$. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{1}{A} \log \Big(A(x+2) \arctan \sqrt{x+1} - A\sqrt{x+1} + e^{AB} \Big).$$