

Università di Roma “Tor Vergata” – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 18/09/2019

Cognome: (in STAMPATELLO)
Nome: (in STAMPATELLO)
Matricola:
Titolare del corso:

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

a/b/c/d

Esercizio 1. [5 punti] Calcolare lo sviluppo di Taylor dell'ordine $n = 5$ nel punto $x_0 = 0$ per la seguente funzione:

$$f(x) = \arctan(x + Ax^3).$$

$[A = 1, 2, 3, 4]$

Svolgimento: Utilizziamo lo sviluppi di Taylor per $y \rightarrow 0$:

$$\arctan y = y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + o(y^6).$$

Pertanto

$$\begin{aligned} & \arctan(x + Ax^3) \\ &= x + Ax^3 - \frac{1}{3}(x + Ax^3)^3 + \frac{1}{5}(x + Ax^3)^5 + o(x^6) \\ &= x + Ax^3 - \frac{x^3}{3}(1 + Ax^2)^3 + \frac{x^5}{5}(1 + Ax^2)^5 + o(x^6) \\ &= x + Ax^3 - \frac{x^3}{3}(1 + 3Ax^2 + o(x^2)) + \frac{x^5}{5}(1 + o(x)) + o(x^6) \\ &= x + \left(A - \frac{1}{3}\right)x^3 + \left(\frac{1}{5} - A\right)x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

Esercizio 2. [6 punti] Data la funzione

$$f(x) = \left((1 + \sqrt{x})^{\frac{1}{x}} - 1 + A\sqrt{x} \right) \log \left(1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}} \right),$$

calcolare $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. $[A = 5, 4, 3, 2]$ Svolgimento: Per $x \rightarrow +\infty$ si ha:

$$(1 + \sqrt{x})^{\frac{1}{x}} - 1 = \exp \left(\frac{1}{x} \log (1 + \sqrt{x}) \right) - 1 = \exp \left(\frac{\log x}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) - 1 = \frac{\log x}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

da cui segue

$$(1 + \sqrt{x})^{\frac{1}{x}} - 1 + A\sqrt{x} \sim A\sqrt{x}.$$

Inoltre

$$\log \left(1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}} \right) \sim \log \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right).$$

Pertanto $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.D'altra parte, per $x \rightarrow 0^+$ si ha

$$(1 + \sqrt{x})^{\frac{1}{x}} - 1 = \exp \left(\frac{1}{x} \left(\log (1 + \sqrt{x}) \right) \right) = \exp \left(\frac{1}{x} \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2} + o(x) \right) \right) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} + o(1)} - 1 = \frac{1}{\sqrt{e}} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} (1 + o(1)),$$

da cui segue

$$(1 + \sqrt{x})^{\frac{1}{x}} - 1 + A\sqrt{x} \sim \frac{1}{\sqrt{e}} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} (1 + o(1)).$$

Inoltre

$$\log \left(1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}} \right) \sim -e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Esercizio 3. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \log \left(\frac{2x^2 - Ax + A^2}{|x| - A} \right)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$$[A = 1, 2, 3, 4]$$

Svolgimento: Dominio:

$$\left\{ x \geq 0 \mid \frac{2x^2 - Ax + A^2}{x - A} > 0 \right\} \cup \left\{ x < 0 \mid \frac{2x^2 - Ax + A^2}{-x - A} > 0 \right\} = \{x > A\} \cup \{x < -A\}.$$

Si ha:

$$f(x) = \begin{cases} \log \left(\frac{2x^2 - Ax + A^2}{x - A} \right) & \text{se } x > A \\ \log \left(-\frac{2x^2 - Ax + A^2}{x + A} \right) & \text{se } x < -A \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow A^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \log \left(\frac{2x^2 - Ax + A^2}{x - A} \right) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow (-A)^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \log \left(-\frac{2x^2 - Ax + A^2}{x + A} \right) = 0.$$

$$x = -A, x = A \text{ asintoti verticali.}$$

Per $x > A$: $f'(x) = \frac{2x^2 - 4Ax}{(2x^2 - Ax + A^2)(x - A)}$, pertanto f è decrescente per $A < x \leq 2A$ e f è crescente per $x \geq 2A$.

Per $x < -A$: $f'(x) = \frac{2x^2 + 4Ax - 2A^2}{(2x^2 - Ax + A^2)(x + A)}$, pertanto f è decrescente per $x \leq -A(1 + \sqrt{2})$ e f è crescente per $-A(1 + \sqrt{2}) \leq x < -A$.

$$x = -A(1 + \sqrt{2}), x = 2A \text{ punti di minimo relativo.}$$

$$f(-A(1 + \sqrt{2})) = \log((4\sqrt{2} + 5)A), \quad f(2A) = \log(7A).$$

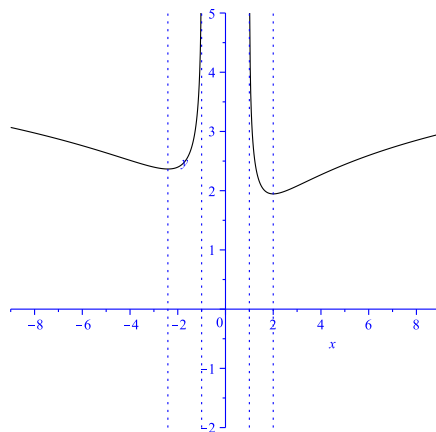


FIGURA 1. Caso $A = 1$: grafico di $f(x) = \log \left(\frac{2x^2 - x + 1}{|x| - 1} \right)$.

Esercizio 4. [7 punti] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^A \frac{1}{x^\alpha} \log\left(\frac{x}{A-x}\right) dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = -1$.

$[A = 5, 4, 3, 2]$

Svolgimento: Risulta:

$$f \sim \frac{\log x}{x^\alpha} \text{ per } x \rightarrow 0^+, \quad f \sim -\frac{\log(A-x)}{A^\alpha} \text{ per } x \rightarrow A^+.$$

Pertanto f è integrabile in $(0, A)$ se e solo se $\alpha < 1$.

Calcoliamo l'integrale per $\alpha = -1$:

$$\int_0^A x \log\left(\frac{x}{A-x}\right) dx.$$

Integrando per parti:

$$\begin{aligned} \int x \log\left(\frac{x}{A-x}\right) dx &= \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \log\left(\frac{x}{A-x}\right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \log\left(\frac{x}{A-x}\right) - \frac{A}{2} \int \frac{x}{A-x} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \log\left(\frac{x}{A-x}\right) + \frac{A}{2}x + \frac{A^2}{2} \log(A-x) + c \\ &= \frac{x^2}{2} \log x + \frac{A}{2}x + \frac{A^2 - x^2}{2} \log(A-x) + c \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \int_0^A x \log\left(\frac{x}{A-x}\right) dx &= \lim_{x \rightarrow A^-} \left(\frac{x^2}{2} \log x + \frac{A}{2}x + \frac{A^2 - x^2}{2} \log(A-x) \right) \\ &\quad - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2}{2} \log x + \frac{A}{2}x + \frac{A^2 - x^2}{2} \log(A-x) \right) \\ &= \frac{A^2}{2}. \end{aligned}$$

Esercizio 5. [5 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{x+B}{\sqrt{(x+B)^2+1}}y \\ y(-B) = A \end{cases}.$$

$$[(A, B) = (1, 2), (2, 1), (-1, 2), (1, -2)]$$

Svolgimento: Lequazione differenziale è lineare omogenea del I ordine. Cerchiamo una primitiva della funzione $\frac{x+B}{\sqrt{(x+B)^2+1}}$:

$$\int \frac{x+B}{\sqrt{(x+B)^2+1}} dx = \sqrt{(x+B)^2+1}.$$

Si deduce

$$y(x) = ce^{\sqrt{(x+B)^2+1}},$$

da cui, imponendo la condizione iniziale $y(-B) = A$ si determina la costante c :

$$c = Ae^{-1}.$$

Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{A}{e} e^{\sqrt{(x+B)^2+1}}.$$