Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 16/02/2021 – II turno

Cognome: (in `STAMPATELLO`)	
Nome: (in `STAMPATELLO`)	
Matricola:	
Titolare del corso:	

Esercizio	**Punteggio**
1	
2	
3	
4	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [8 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\big((n+a)^n - An!\big)\big(e^{b\sqrt{n}} + Bn^a + C\big)}{(n+b\sqrt{n}+c)^n}$$

$[(a,b,c) = (2,3,2),(3,2,2),(3,3,3),(2,2,3), \quad (A,B,C) = (5,7,4),(2,8,9),(4,4,6),(3,8,3)]$

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y \to 0^+$:

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2), \quad e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2), \quad \sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + o(y^2).$$

Pertanto

$$(n+a)^n = n^n\Big(1+\frac{a}{n}\Big)^n = n^n e^{n\log(1+\frac{a}{n})} = n^n e^{n(\frac{a}{n}+o(\frac{1}{n}))} = n^n e^{a+o(1)} = n^n e^a(1+o(1))$$

da cui segue

$$(n+a)^n - An! = n^n\bigg(\Big(1+\frac{a}{n}\Big)^n + o(1)\bigg) = n^n e^a(1+o(1)).$$

Inoltre

$$e^{b\sqrt{n}} + Bn^a + C = e^{b\sqrt{n}}(1+o(1)).$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}(n+b\sqrt{n}+c)^n &= n^n\Big(1+\frac{b}{\sqrt{n}}+\frac{c}{n}\Big)^n = n^n e^{n\log(1+\frac{b}{\sqrt{n}}+\frac{c}{n})}\\ &= n^n e^{n(\frac{b}{\sqrt{n}}+\frac{c}{n}-\frac{1}{2}(\frac{b}{\sqrt{n}}+\frac{c}{n})^2+o(\frac{1}{n}))} = n^n e^{n(\frac{b}{\sqrt{n}}+\frac{c}{n}-\frac{b^2}{2n}+o(\frac{1}{n}))}\\ &= n^n e^{b\sqrt{n}+c-\frac{b^2}{2}+o(1)} = n^n e^{b\sqrt{n}} e^{c-\frac{b^2}{2}}(1+o(1)).\end{aligned}$$

Si conclude che il limite richiesto vale

$$e^{a-c+\frac{b^2}{2}}.$$

Cognome (in `STAMPATELLO`): .... Nome (in `STAMPATELLO`):..

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{|\log x \pm a|}{1 + \log^2 x}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$[a = 1, 2]$

<u>*Svolgimento:*</u> Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{|\log x + a|}{1 + \log^2 x}.$$

Dominio: $\{x > 0\}$. Inoltre

$$f(x) \geq 0 \ \ \forall x > 0, \qquad f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e^a}.$$

Risulta:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

$\boxed{y = 0 \text{ asintoto orizzontale a } +\infty.}$

Per $0 < x < \frac{1}{e^a}$: $f'(x) = \frac{\log^2 x + 2a \log x - 1}{x(1+\log^2 x)^2}$, pertanto f è crescente per $0 < x \leq \frac{1}{e^{a+\sqrt{a^2+1}}}$ e f è decrescente per $\frac{1}{e^{a+\sqrt{a^2+1}}} \leq x \leq \frac{1}{e^a}$.
Per $x > \frac{1}{e^a}$: $f'(x) = \frac{-\log^2 x - 2a \log x + 1}{x(1+\log^2 x)^2}$, pertanto f è crescente per $\frac{1}{e^a} \leq x \leq \frac{1}{e^{a-\sqrt{a^2+1}}}$ e f è decrescente per $x \geq \frac{1}{e^{a-\sqrt{a^2+1}}}$.

$\boxed{x = \frac{1}{e^{a+\sqrt{a^2+1}}},\ x = \frac{1}{e^{a-\sqrt{a^2+1}}} \text{ punti di massimo relativo, } x = \frac{1}{e^a} \text{ punto di minimo relativo.}}$

Inoltre

$$f'_-\left(\frac{1}{e^a}\right) = -\frac{e^a}{1+a^2}, \quad f'_-\left(\frac{1}{e^a}\right) = \frac{e^a}{1+a^2}.$$

$\boxed{x = \frac{1}{e^a} \text{ punto angoloso.}}$

Infine

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty.$$

$\boxed{x = 0 \text{ punto di cuspide.}}$

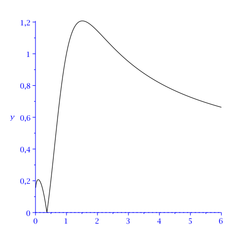

FIGURA 1. Grafico di $f(x) = \dfrac{|\log x + 1|}{1 + \log^2 x}$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. [8 punti] Calcolare il seguente integrale improprio:

$$\int_0^a \arctan\left(\frac{x}{a-x}\right)dx.$$

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento: Integrando per parti si ha:

$$\int \arctan\left(\frac{x}{a-x}\right)dx = \int_0^a (x)' \arctan\left(\frac{x}{a-x}\right)dx = x\arctan\left(\frac{x}{a-x}\right) - a\int \frac{x}{(a-x)^2+x^2}dx.$$

Calcoliamo l'ultimo integrale

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(a-x)^2+x^2}dx = \int \frac{x}{2x^2-2ax+a^2}dx &= \frac{1}{4}\int \frac{4x-2a}{2x^2-2ax+a^2}dx + \frac{a}{2}\int \frac{1}{2x^2-2ax+a^2}dx \\ &= \frac{1}{4}\log(2x^2-2ax+a^2) + \frac{a}{4}\int \frac{1}{(x-\frac{a}{2})^2+\frac{a^2}{4}}dx \\ &= \frac{1}{4}\log(2x^2-2ax+a^2) + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2x}{a}-1\right) + c.\end{aligned}$$

Pertanto

$$\int \arctan\left(\frac{x}{a-x}\right)dx = x\arctan\left(\frac{x}{a-x}\right) - \frac{a}{4}\log(2x^2-2ax+a^2) - \frac{a}{2}\arctan\left(\frac{2x}{a}-1\right) + c.$$

Si conclude:

$$\int_0^a \arctan\left(\frac{x}{a-x}\right)dx = \frac{a}{2}\pi - \frac{a}{2}\log a - \frac{a}{2}\arctan 1 + \frac{a}{2}\log a + \frac{a}{2}\arctan(-1) = \frac{1}{4}a\pi.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. [6 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - \dfrac{1}{2x} y = b \arcsin(1-x) \\ y(1) = a \end{cases}.$$

[$(a,b) = (1,2), (2,2), (3,3), (4,4)$]

<u>*Svolgimento:*</u> L'equazione differenziale è lineare del primo ordine.
Cerchiamo una primitiva della funzione $-\frac{1}{2x}$:

$$\int -\frac{1}{2x} dx = -\frac{1}{2} \log x.$$

Cerchiamo ora una primitiva della funzione $e^{-\frac{1}{2}\log x} b \arcsin(1-x) = \frac{b}{\sqrt{x}} \arcsin(1-x)$: integrando per parti

$$\int \frac{b}{\sqrt{x}} \arcsin(1-x) dx = 2b \int \left(\sqrt{x}\right)' \arcsin(1-x) dx = 2b\sqrt{x} \arcsin(1-x) + 2b \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x-x^2}} dx$$
$$= 2b\sqrt{x} \arcsin(1-x) + 2b \int \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx = 2b\sqrt{x} \arcsin(1-x) - 4b\sqrt{2-x} + c.$$

Si deduce

$$y(x) = e^{\frac{1}{2}\log x} \left(c + 2b\sqrt{x} \arcsin(1-x) - 4b\sqrt{2-x} \right) = \sqrt{x} \left(c + 2b\sqrt{x} \arcsin(1-x) - 4b\sqrt{2-x} \right),$$

da cui, imponendo la condizione iniziale $y(1) = a$, si determina la costante c:

$$c = a + 4b.$$

Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \sqrt{x} \left(a + 4b + 2b\sqrt{x} \arcsin(1-x) - 4b\sqrt{2-x} \right).$$