Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 16/02/2021 – I turno

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	

Esercizio	**Punteggio**
1	
2	
3	
4	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [8 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{ax} - \cos x - ax\log x}{x^2 \log^2(ax^2 + \sin x)}.$$

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y \to 0$:

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3), \qquad \cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + o(y^3).$$

Si ha:

$$x^{ax} = e^{ax\log x} = 1 + ax\log x + \frac{a^2}{2}x^2\log^2 x + o(x^2\log^2 x).$$

Pertanto

$$\begin{aligned} x^{ax} - \cos x - ax\log x &= 1 + ax\log x + \frac{a^2}{2}x^2\log^2 x - 1 + \frac{x^2}{2} - ax\log x + o(x^2\log^2 x) \\ &= \frac{a^2}{2}x^2\log^2 x + o(x^2\log^2 x). \end{aligned}$$

D'altra parte

$$\log^2(ax^2 + \sin x) = \log^2(x + o(x)) = \Big(\log x + \log(1 + o(1))\Big)^2 = \Big(\log x + o(1)\Big)^2 = \log^2 x + o(\log^2 x).$$

da cui segue

$$x^2\log^2(ax^2 + \sin x) = x^2\log^2(x) + o(x^2\log^2 x).$$

Si conclude che il limite richiesto vale

$$\frac{a^2}{2}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2ax}{x^2+a^2}\right) - \frac{1}{2}\log\frac{x}{a}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$[a = 2, 3, \frac{1}{2}, \sqrt{3}]$

Svolgimento: Dominio: $\{x > 0\}$. Risulta:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty.$$

$\boxed{x = 0 \text{ asintoto verticale.}}$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Per $x > 0$, $x \neq a$: $f'(x) = \frac{2a(a^2-x^2)}{(x^2+a^2)|x^2-a^2|} - \frac{1}{2x}$, pertanto f è decrescente per $0 < x \leq (2-\sqrt{3})a$ e $x \geq a$ f è crescente per $(2-\sqrt{3})a \leq x \leq a$.

$\boxed{x = (2-\sqrt{3})a \text{ punto di minimo relativo, } x = a \text{ punto di massimo relativo.}}$

Inoltre

$$\lim_{x\to a^-} f'(x) = \frac{1}{2a}, \qquad \lim_{x\to a^+} f'(x) = -\frac{3}{2a}$$

$\boxed{x = a \text{ punto angoloso.}}$

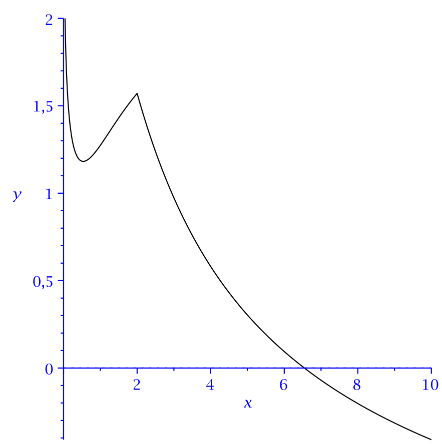

FIGURA 1. Grafico di $f(x) = \arcsin\left(\frac{4x}{x^2+4}\right) - \frac{1}{2}\log\frac{x}{2}$.

Cognome (in `STAMPATELLO`): .... Nome (in `STAMPATELLO`):..

Esercizio 3. **[8 punti]** Calcolare il seguente integrale improprio:

$$\int_0^{a^2} \log(x + a\sqrt{x})dx.$$

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento: Con la sostituzione $\sqrt{x} = t$ l'integrale diventa

$$\int_0^{a^2} \log(x + a\sqrt{x})dx = \int_0^{a} 2t\log(t^2 + at)dt.$$

Calcoliamo l'ultimo integrale per parti:

$$\begin{aligned}\int 2t\log(t^2 + at)dt &= \int \left(t^2\right)' \log(t^2 + at)dt \\ &= t^2\log(t^2 + at) - \int \frac{t(2t + a)}{t + a}dt\end{aligned}$$

Risolviamo l'ultimo integrale

$$\begin{aligned}\int \frac{t(2t + a)}{t + a}dt &= \int \left(2t - a + a^2\frac{1}{t + a}\right)dt \\ &= t^2 - at + a^2\log(t + a) + c.\end{aligned}$$

Pertanto

$$\int 2t\log(t^2 + at)dt = t^2\log(t^2 + at) - t^2 + at - a^2\log(t + a) + c.$$

Si conclude:

$$\begin{aligned}\int_0^{a^2} \log(x + a\sqrt{x})dx &= \int_0^{a} 2t\log(t^2 + at)dt \\ &= a^2\log(2a^2) - a^2\log(2a) \\ &\quad - \lim_{t\to 0^+}\left(t^2\log(t^2 + at) - t^2 + at - a^2\log(t + a)\right) \\ &= a^2\log(2a^2) - a^2\log(2a) + a^2\log a \\ &= a^2\log(a^2).\end{aligned}$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. [6 punti] Risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione:

$$|z|^2 = z^2 \pm z + 12 \pm \overline{z} \qquad \left(2|z|^2 = 2z^2 \pm z + 6 \pm \overline{z}\right).$$

Svolgimento: Consideriamo l'equazione

$$|z|^2 = z^2 + z + 12 + \overline{z}.$$

Poniamo $z = x + \mathrm{i}y$, con x, y incognite reali, e riscriviamo l'equazione in questo modo:

$$x^2 + y^2 = x^2 + 2\mathrm{i}xy - y^2 + x + \mathrm{i}y + 12 + x - \mathrm{i}y,$$

da cui segue

$$2y^2 = 2\mathrm{i}xy + 2x + 12.$$

Poiché un numero complesso è zero se e solo se la sua parte reale e parte immaginaria sono zero, l'equazione si trasforma in un sistema di due equazioni nelle due incognite reali x, y

$$\begin{cases} 2y^2 = 2x + 12 \\ xy = 0 \end{cases}.$$

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} 2y^2 = 2x + 12 \\ xy = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2y^2 = 12 \\ x = 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} 2x + 12 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \pm\sqrt{6} \\ x = 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x = -6 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Pertanto le soluzione dell'equazione sono

$$\pm\sqrt{6}\mathrm{i}, \qquad -6.$$