Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta online del 14/09/2020

Cognome: (in STAMPATELLO)
Nome: (in STAMPATELLO)
Matricola:
Titolare del corso:

Esercizio	**Punteggio**
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^2}{6x}-1+3^{-x}\Big(2+\cos\Big(\frac{a}{x}\Big)\Big)^x\right)\big(x^2+\log^2 x\big).$$

[$a=\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5}$]

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y\to 0$:

$$\cos y = 1-\frac{y^2}{2}+o(y^3),\quad \log(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+o(y^2),\quad e^y=1+y+\frac{y^2}{2}+o(y^2).$$

Pertanto, per $x\to+\infty$,

$$\begin{aligned}\Big(2+\cos\Big(\frac{a}{x}\Big)\Big)^x &= \Big(3-\frac{a^2}{2x^2}+o\Big(\frac{1}{x^3}\Big)\Big)^x = 3^x\Big(1-\frac{a^2}{6x^2}+o\Big(\frac{1}{x^3}\Big)\Big)^x\\ &= 3^x e^{x\log(1-\frac{a^2}{6x^2}+o(\frac{1}{x^3}))} = 3^x e^{x(-\frac{a^2}{6x^2}+o(\frac{1}{x^3}))} = 3^x e^{-\frac{a^2}{6x}+o(\frac{1}{x^2})}\\ &= 3^x\Big(1-\frac{a^2}{6x}+\frac{a^4}{72x^2}+o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big)\end{aligned}$$

da cui segue

$$\frac{a^2}{6x}-1+3^{-x}\Big(2+\cos\Big(\frac{a}{x}\Big)\Big)^x = \frac{a^2}{6x}-1+1-\frac{a^2}{6x}+\frac{a^4}{72x^2}+o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)=\frac{a^4}{72x^2}+o(1).$$

D'altra parte

$$x^2+\log^2 x = x^2+o(x^2).$$

Pertanto il limite richiesto vale

$$\frac{a^4}{72}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. Determinare gli intervalli di monotonia della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^3 - a^3}}{|x - a|}.$$

$[a = -1, 1, 2, -2]$

Svolgimento: Consideriamo il caso $a > 0$. Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.
Per $x < a$:

$$f'(x) = (x^3 - a^3)^{-2/3} \frac{ax^2 - a^3}{(a - x)^2},$$

pertanto f è crescente per $x \leq -a$ e f è decrescente per $-a \leq x < a$.
Per $x > a$:

$$f'(x) = (x^3 - a^3)^{-2/3} \frac{a^3 - ax^2}{(x - a)^2},$$

pertanto f è decrescente per $x > a$.

$\boxed{x = -a \text{ punto di massimo relativo, } f(-a) = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}.}$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. Determinare le primitive della funzione:

$$f(x) = \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}$$

e calcolare il seguente integrale improprio:

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{|x^2-(a-1)x-a|^\alpha}}dx.$$

$[a = 2, 3, 5, 6]$

Svolgimento: Con la sostituzione $\sqrt{x} = t$ si ha:

$$\int_a^{+\infty} x^{3/2}e^{-\sqrt{x}}dx = 2\int_{\sqrt{a}}^{+\infty} t^2e^{-t}dt.$$

Integrando per parti

$$\begin{aligned}\int t^2e^{-t}dt &= -\int t^2(e^{-t})'dt = -t^2e^{-t} + 2\int te^{-t}dt \\ &= -t^2e^{-t} - 2\int t(e^{-t})'dt = -t^2e^{-t} - 2te^{-t} + 2\int e^{-t}dt \\ &= -t^2e^{-t} - 2te^{-t} - 2e^{-t} + c.\end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} x^{3/2}e^{-\sqrt{x}}dx = 2\int_{\sqrt{a}}^{+\infty} t^2e^{-t}dt &= 2\lim_{t\to+\infty} e^{-t}\Big(-t^2-2t-2\Big) + 2e^{-\sqrt{a}}(a+2\sqrt{a}+2) \\ &= 2e^{-\sqrt{a}}(a+2\sqrt{a}+2).\end{aligned}$$