Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 13/09/2021

Cognome: (in `STAMPATELLO`)
Nome: (in `STAMPATELLO`)
Matricola:
Titolare del corso:

Esercizio	**Punteggio**
1	
2	
3	
4	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [8 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{\left(\log^2(1+ax) - a^2x^2\right)\left(\frac{x}{a^2} + e^{-\frac{1}{x}}\right)}.$$

[$a = 2, 3, -2, -3$)]

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppo di Taylor per $y \to 0^+$:

$$\cos y = \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + o(y^5), \quad \sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + o(y^2), \quad \log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2).$$

$$\cos x - \sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}\right) + o(x^4) = \frac{x^4}{6} + o(x^4).$$

D'altra parte

$$\log^2(1+ax) - a^2x^2 = \left(ax - \frac{a^2}{2}x^2 + o(x^2)\right)^2 - a^2x^2 = -a^3x^3 + o(x^3),$$

$$\frac{x}{a^2} + e^{-\frac{1}{x}} = \frac{x}{a^2} + o(x).$$

Si conclude che il limite richiesto vale

$$-\frac{1}{6a}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \arctan\left(ax + \frac{b}{|x|}\right)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$[(a, b) = (2, 1), (3, 2), (4, 1), (5, 2)]$

Svolgimento: Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Risulta:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Per $x > 0$: $f'(x) = \frac{x^2}{x^2+(ax^2+b)^2}\left(a - \frac{b}{x^2}\right)$, pertanto f è crescente per $x \geq \sqrt{\frac{b}{a}}$ e f è decrescente per $0 < x \leq \sqrt{\frac{b}{a}}$.
Per $x < 0$: $f'(x) = \frac{x^2}{x^2+(ax^2-b)^2}\left(a + \frac{b}{x^2}\right)$, pertanto f è crescente per $x < 0$.

$\boxed{x = \sqrt{\tfrac{b}{a}} \text{ punto di minimo relativo.}}$

$$f\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right) = \arctan\left(2\sqrt{ab}\right).$$

Inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\frac{1}{b}, \quad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \frac{1}{b}.$$

$\boxed{x = 0 \text{ punto di angoloso.}}$

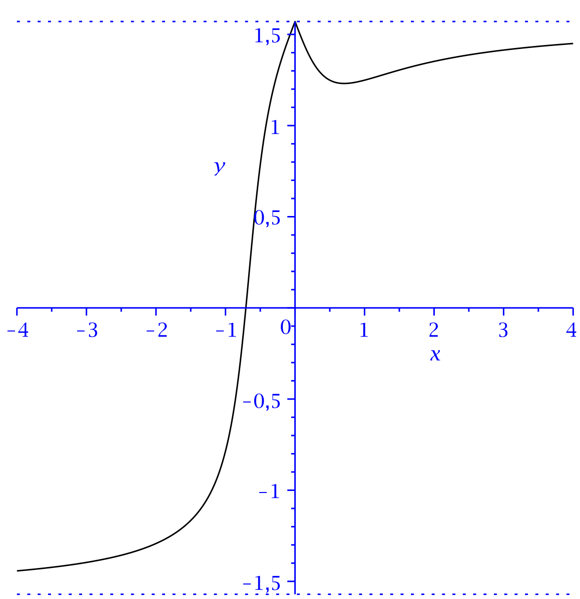

FIGURA 1. Grafico di $f(x) = \arctan\left(2x + \frac{1}{|x|}\right)$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 3. [**8 punti**] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \log(e^{ax} - 1) dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = \frac{a}{2}$.

$[a = 2, 3, 4, 5]$

<u>*Svolgimento:*</u> Risulta:

$$f(x) \sim \log(e^{ax} - 1) \sim \log x \text{ per } x \to 0^+.$$

Pertanto f è integrabile in $(0, 1)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
D'altra parte

$$f(x) \sim axe^{-\alpha x} \text{ per } x \to +\infty.$$

Pertanto f è integrabile in $(1, +\infty)$ se e solo se $\alpha > 0$.
Si deduce che f è integrabile in $(0, +\infty)$ se e solo se $\alpha > 0$.
Calcoliamo l'integrale per $\alpha = \frac{a}{2}$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{a}{2}x} \log(e^{ax} - 1) dx.$$

Con la sostituzione $e^{\frac{a}{2}x} = t$ Usando l'integrazione per parti:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{a}{2}x} \log(e^{ax} - 1) dx = \frac{2}{a} \int_1^{+\infty} \frac{\log(t^2 - 1)}{t^2} dt.$$

Calcoliamo l'ultimo integrale per parti

$$\begin{aligned}\int \frac{\log(t^2 - 1)}{t^2} dt &= -\int \left(\frac{1}{t}\right)' \log(t^2 - 1) dt = -\frac{\log(t^2 - 1)}{t} + 2\int \frac{1}{t^2 - 1} dt \\ &= -\frac{\log(t^2 - 1)}{t} + \int \left(\frac{1}{t - 1} - \frac{1}{t + 1}\right) dt = -\frac{\log(t^2 - 1)}{t} + \log\frac{t - 1}{t + 1} + c.\end{aligned}$$

Si conclude:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{a}{2}x} \log(e^{ax} - 1) dx &= \frac{2}{a} \int_1^{+\infty} t \log(t^2 - 1) dt \\ &= \frac{2}{a} \lim_{t \to +\infty} \left(-\frac{\log(t^2 - 1)}{t} + \log\frac{t - 1}{t + 1}\right) \\ &\quad - \frac{2}{a} \lim_{t \to 1^+} \left(\left(1 - \frac{1}{t}\right) \log(t - 1) - \left(\frac{1}{t} + 1\right) \log(t + 1)\right) \\ &= \frac{4}{a} \log 2.\end{aligned}$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 4. **[6 punti]** Calcolare lo sviluppo di Taylor dell'ordine $n = 3$ con centro $x_0 = e$ per la seguente funzione:

$$(x - ea)\log x.$$

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento: Utilizziamo lo sviluppi di Taylor per $y \to 0^+$:

$$\log(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3).$$

Posto $y = x - e$:

$$\begin{aligned} f(x) =&(x - a)\log x = (y + e - ea)\log^2(y + e) = (y + e - ea)\log\left(e\left(1 + \frac{y}{e}\right)\right) \\ &= (y + e - ea)\left(1 + \log\left(1 + \frac{y}{e}\right)\right) \end{aligned}$$

Per $y \to 0$ risulta

$$\log\left(1 + \frac{y}{e}\right) = \frac{y}{e} - \frac{y^2}{2e^2} + \frac{y^3}{3e^3} + o(y^3).$$

Pertanto per $y \to 0$

$$\begin{aligned} &(y + e - ea)\left(1 + \log\left(1 + \frac{y}{e}\right)\right) = (y + e - ea)\left(1 + \frac{y}{e} - \frac{y^2}{2e^2} + \frac{y^3}{3e^3} + o(y^3)\right) \\ &= e(1 - a) + (2 - a)y + \frac{1 + a}{2e}y^2 - (2a + 1)\frac{y^3}{6e^2} + o(y^3). \end{aligned}$$

Si deduce che, per $x \to e$:

$$f(x) = e(1 - a) + (2 - a)(x - e) + \frac{1 + a}{2e}(x - e)^2 - (2a + 1)\frac{(x - e)^3}{6e^2} + o((x - e)^3).$$