Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta online del 13/07/2020

Esercizio 1. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty}(n+b)^{2n-1}\big(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}\big)^n.$$

$[b=5,4,3,2]$

<u>*Svolgimento:*</u> Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y\to 0$:

$$e^y = 1+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}+o(y^6),\quad \log(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+o(y^2).$$

Si ha:

$$\begin{aligned}
\big(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}\big)^n &= n\Big(\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}-1\Big)^n = n\Big(e^{\frac{1}{n}\log(1+\frac{1}{n})}-1\Big)^n\\
&= n\Big(e^{\frac{1}{n}(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}))}-1\Big)^n = n\Big(e^{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n^3}+o(\frac{1}{n^3})}-1\Big)^n\\
&= n\Big(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n^3}+o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big)^n = \frac{1}{n^{2n-1}}\Big(1-\frac{1}{2n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)^n\\
&= \frac{e^n}{n^{2n-1}}e^{n\log(1-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n}))} = \frac{1}{n^{2n-1}}e^{n(-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n}))} = \frac{1}{n^{2n-1}}e^{-\frac{1}{2}+o(1)}.
\end{aligned}$$

D'altra parte

$$(n+b)^{2n-1} = n^{2n-1}\Big(1+\frac{b}{n}\Big)^{2n-1} = n^{2n-1}e^{(2n-1)\log(1+\frac{b}{n})} = n^{2n-1}e^{(2n-1)(\frac{b}{n}+o(\frac{1}{n}))} = n^{2n-1}e^{2b+o(1)},$$

Pertanto il limite richiesto vale

$$e^{-\frac{1}{2}+2b}.$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. Determinare gli intervalli di monotonia della seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt{|x^2 - a^2|} - x + a.$$

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento: Per $x < -a$ e $x > a$:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} - 1,$$

pertanto f è decrescente per $x < -a$ e f è crescente per $x > a$.
Per $-a < x < a$:

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} - 1,$$

pertanto f è crescente per $-a < x \leq -\frac{a}{\sqrt{2}}$ e f è decrescente per $-\frac{a}{\sqrt{2}} \leq x < a$.

$\boxed{x = -\frac{a}{\sqrt{2}} \text{ punto di massimo relativo, } f(-\frac{a}{\sqrt{2}}) = (\sqrt{2} + 1)a}$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. Determinare le primitive della funzione:

$$f(x) = \log^2(a \pm x)$$

e calcolare il seguente integrale improprio:

$$\int_{-a}^{a} \log^2(a \pm x)dx.$$

$[a = 2, 3]$

Svolgimento: Consideriamo il primo integrale:

$$\int_{-a}^{a} \log^2(a + x)dx.$$

Con la sostituzione $a + x = t$ si ha:

$$\int_{-a}^{a} \log^2(a + x)dx = \int_{0}^{2a} \log^2(t)dt.$$

Integrando per parti

$$\begin{aligned}\int \log^2 t dt = \int (t)' \log^2(t)dt &= t \log^2 t - 2 \int \log t dt \\ &= t \log^2 t - 2t \log t + 2t + c\end{aligned}$$

da cui segue

$$\int \log^2(a + x)dx = (a + x) \log^2(a + x) - 2(a + x) \log(a + x) + 2t + c.$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} \log^2(a + x)dx &= \int_{0}^{2a} \log^2(t)dt \\ &= \lim_{t\to(2a)^-} \left(t \log^2 t - 2t \log t + 2t\right) - \lim_{t\to0^+} \left(t \log^2 t - 2t \log t + 2t\right) \\ &= 2a \log^2(2a) - 4a \log(2a) + 4a.\end{aligned}$$