Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 10/07/2019

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

a/b/c/d

Esercizio 1. **[5 punti]** Calcolare lo sviluppo di Taylor dell'ordine $n = 5$ con centro $x_0 = 0$ per la seguente funzione:

$$f(x) = \frac{1}{x + Ax^2 + e^{-x}}.$$

$[A = 1, -1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y \to 0$:

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{24} + \frac{y^5}{120} + o(y^5), \qquad \frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - y^3 + o(y^3).$$

Pertanto risulta

$$x + Ax^2 + e^{-x} - 1 = \frac{x^2}{2} + Ax^2 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + o(x^5),$$

da cui segue

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x + Ax^2 + e^{-x}} &= \frac{1}{1 + (x + Ax^2 + e^{-x} - 1)} \\
&= 1 - \left(\frac{x^2}{2} + Ax^2 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) + \left(\frac{x^2}{2} + Ax^2 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)^2 \\
&\quad - \left(\frac{x^2}{2} + Ax^2 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)^3 + o(x^6) \\
&= 1 - \frac{x^2}{2} - Ax^2 + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \left(\frac{(2A+1)^2}{4}x^4 - \frac{2A+1}{6}x^5\right) + o(x^5) \\
&= 1 - \left(\frac{1}{2} + A\right)x^2 + \frac{x^3}{6} + \left(\frac{5}{24} + A + A^2\right)x^4 - \left(\frac{19}{120} + \frac{A}{3}\right)x^5 + o(x^5).
\end{aligned}$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. [6 punti] Data la funzione:

$$f(x) = \frac{(\sqrt{A}-\sqrt{x})\log\left(\left|\sin\frac{\pi x}{A}\right|\right)}{\left((x-A)^2+\log(\frac{x}{A})\right)\log(|x-A|)},$$

calcolare $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to A} f(x)$.

$[A = 2, 3, 5, 6]$

Svolgimento: Per $x \to 0^+$ si ha:

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{A}\log\left(\sin\frac{\pi x}{A}\right)}{\log x \log A} \sim \frac{\sqrt{A}}{\log A}.$$

Pertanto $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\sqrt{A}}{\log A}$. Posto $y = x - A$, si ha

$$f(x) = \frac{(\sqrt{A}-\sqrt{y+A})\log\left(\left|\sin\frac{\pi(y+A)}{A}\right|\right)}{\left(y^2+\log(\frac{y+A}{A})\right)\log(|y|)} = -\sqrt{A}\frac{(\sqrt{1+\frac{y}{A}}-1)\log\left(\left|\sin\frac{\pi y}{A}\right|\right)}{\left(y^2+\log(1+\frac{y}{A})\right)\log(|y|)}$$

Si ha:

$$\sqrt{1+\frac{y}{A}}-1 \sim \frac{y}{2A}, \quad y^2+\log\left(1+\frac{y}{A}\right) \sim \frac{y}{A}, \quad \frac{\log\left(\left|\sin\frac{\pi y}{A}\right|\right)}{\log(|y|)} \sim 1 \text{ per } y \to 0$$

Pertanto $\lim_{x\to A} f(x) = -\frac{\sqrt{A}}{2}$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = 5B \arctan\left(\frac{A^2}{x^2}\right) - 2B \log |x^2 - A^2|$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$[(A, B) = (1, 1), (\sqrt{2}, 1), (1, -1), (\sqrt{2}, -1)]$

Svolgimento: $\boxed{\text{CASO } A > 0,\ B > 0}$

Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{-A, 0, A\}$. f è pari.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{5}{2}\pi B - 4B \log A, \qquad \lim_{x\to A} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

$\boxed{x = -A,\ x = A \text{ asintoti verticali.}}$

Per $0 < x < A$: $f'(x) = Bx\big(-\frac{10A^2}{x^4+A^4} + \frac{4}{A^2-x^2}\big) = 2Bx\frac{2x^4+5A^2x^2-3A^4}{(x^4+A^4)(A^2-x^2)}$, pertanto f è decrescente per $0 < x \leq \frac{A}{\sqrt{2}}$ e f è crescente per $\frac{A}{\sqrt{2}} \leq x < A$.

Per $x > A$: $f'(x) = Bx\big(-\frac{10A^2}{x^4+A^4} + \frac{2}{A^2-x^2}\big) = 2Bx\frac{2x^4+5A^2x^2-3A^4}{(x^4+A^4)(A^2-x^2)}$, pertanto f è decrescente per $x > A$.

$\boxed{x = \frac{A}{\sqrt{2}} \text{ punto di minimo relativo.}}$

Inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0.$$

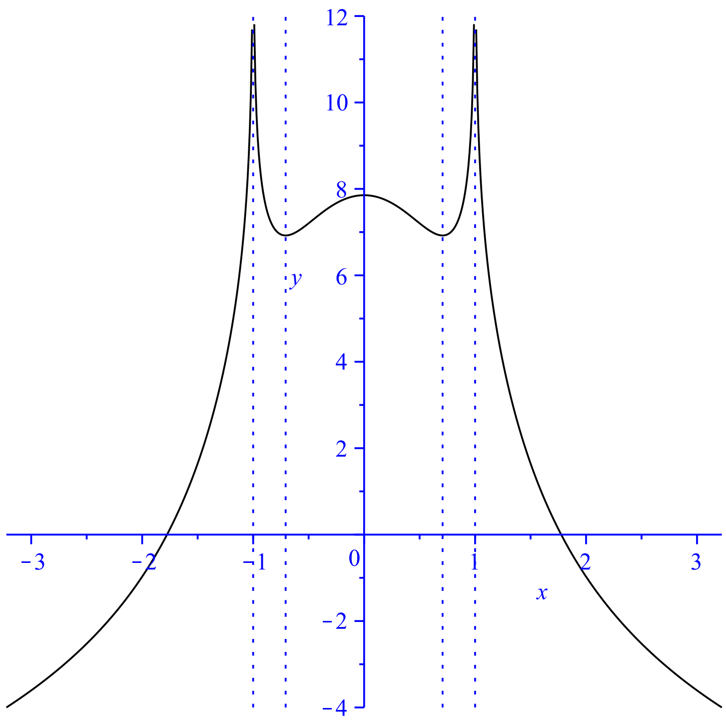

FIGURA 1. Caso $A = B = 1$: grafico di $f(x) = 5\arctan(1/x^2) - 2\log(|x^2 - 1|)$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. **[7 punti]** Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_A^{+\infty} \frac{\log(1 - e^{-\sqrt{x-A}})}{e^{\alpha\sqrt{x-A}}(x-A)^\alpha} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

$[A = 1, 2, 3, 4]$

<u>*Svolgimento:*</u> Risulta:

$$f(x) \sim \frac{\log(x-A)}{2(x-A)^\alpha} \text{ per } x \to A^+.$$

Segue che f è integrabile in $(A, A+1)$ se e solo se $\alpha < 1$. D'altra parte

$$f(x) \sim -\frac{e^{-\sqrt{x-A}}}{e^{\alpha\sqrt{x-A}}(x-A)^\alpha} \sim -\frac{e^{-(1+\alpha)\sqrt{x}}}{x^\alpha} \text{ per } x \to +\infty.$$

Segue che f è integrabile in $(A+1, +\infty)$ se e solo se $\alpha > -1$.
Pertanto f è integrabile in $(A, +\infty)$ se e solo se $-1 < \alpha < 1$.
Calcoliamo l'integrale per $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\int_A^{+\infty} \frac{\log(1 - e^{-\sqrt{x-A}})}{e^{\frac{\sqrt{x-A}}{2}}\sqrt{x-A}} dx.$$

Con la sostituzione $e^{-\frac{\sqrt{x-A}}{2}} = t$

$$\int_A^{+\infty} \frac{\log(1 - e^{-\sqrt{x-A}})}{e^{\frac{\sqrt{x-A}}{2}}\sqrt{x-A}} dx = 4\int_0^1 \log(1-t^2)dt.$$

Integrando per parti

$$\begin{aligned}
\int \log(1-t^2)dt &= \int (t)' \log(1-t^2)dt \\
&= t\log(1-t^2) + 2\int \frac{t^2}{1-t^2}dt \\
&= t\log(1-t^2) - 2t + \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)dt \\
&= t\log(1-t^2) - 2t - \log\frac{|1-t|}{|1+t|} + c.
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\int_A^{+\infty} \frac{\log(1 - e^{-\sqrt{x-A}})}{e^{\frac{\sqrt{x-A}}{2}}\sqrt{x-A}} dx &= 4\lim_{t\to 1^-}\left(t\log(1-t^2) - 2t - \log\frac{1-t}{1+t}\right) \\
&\quad - 4\lim_{t\to 0^+}\left(t\log(1-t^2) - 2t - \log\frac{1-t}{1+t}\right) \\
&= 4\lim_{t\to 1^-}\big(t-1\big)\log(1-t) - 8(1-\log 2) \\
&= 8(\log 2 - 1).
\end{aligned}$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):...

Esercizio 5. **[5 punti]** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 8y = A\cos(2x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = B \end{cases} .$$

$$\left[\begin{cases} y'' + 4y' + 8y = A\sin(2x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = B \end{cases}\right] .$$

$[(A, B) = (5, 1), (10, -1)]$

<u>*Svolgimento:*</u> Risolviamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 8y = A\cos(2x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = B \end{cases} .$$

L'equazione differenziale è lineare del secondo ordine non omogenea. Dato che le soluzioni dell'equazione caratteristica $\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0$ sono $-2 \pm 2\mathrm{i}$, la soluzione generica dell'equazione omogenea associata

$$y'' + 4y' + 8y = 0$$

è

$$c_1 e^{-2x}\cos(2x) + c_2 e^{-2x}\sin(2x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Dal momento che $2\mathrm{i}$ non è soluzione dellequazione caratteristica, cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$\bar{y}(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x),$$

da cui, sostituendo nell'equazione, si ottiene

$$(4a + 8b)\cos(2x) + (4b - 8a)\sin 2x = A\cos(2x).$$

Si ottiene così $a = \frac{A}{20}$, $b = \frac{A}{10}$. Pertanto la soluzione generale dell'equazione è

$$y(x) = c_1 e^{-2x}\cos(2x) + c_2 e^{-2x}\sin(2x) + \frac{A}{20}\cos(2x) + \frac{A}{10}\sin(2x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 0$, $y'(0) = B$ si ha:

$$c_1 + \frac{A}{20} = 0, \quad -2c_1 + 2c_2 + \frac{A}{5} = B$$

da cui segue

$$c_1 = -\frac{A}{20}, \qquad c_2 = \frac{1}{2}\Big(B - \frac{3}{10}A\Big)$$

Si conclude che la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = -\frac{A}{20}e^{-2x}\cos(2x) + \frac{1}{2}\Big(B - \frac{3}{10}A\Big)e^{-2x}\sin(2x) + \frac{A}{20}\cos(2x) + \frac{A}{10}\sin(2x).$$