Università di Roma "Tor Vergata" – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 05/09/2019

Cognome: (in STAMPATELLO)	
Nome: (in STAMPATELLO)	
Matricola:	
Titolare del corso:	
Esame orale:	

Esercizio	**Punteggio**
1	
2	
3	
4	
5	
Totale	

a/b/c/d

Esercizio 1. **[5 punti]** Calcolare lo sviluppo di Taylor dell'ordine $n = 6$ con centro $x_0 = 0$ per la seguente funzione:

$$f(x) = x\log(1+\sin^2 x) + Ax^3.$$

$A = [2, 3, 4, 5]$

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y \to 0$:

$$\sin y = y - \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{120} + o(y^6), \qquad \log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3).$$

Risulta

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5).$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\log(1+\sin^2 x) &= x^2 - \frac{x^4}{3} - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5)\right)^3 + o(x^5)\\ &= x^2 - \frac{x^4}{3} - \frac{x^4}{2} + o(x^5).\end{aligned}$$

da cui segue

$$x\log(1+\sin^2 x) + Ax^3 = (1+A)x^3 - \frac{5}{6}x^5 + o(x^6).$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 2. [6 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(n + n\sin\frac{1}{n}\right)^n - e\,n^n}{(n+\log n)^n - n^{n+1}} n\big(\log(An+B)\big)^2.$$

$[(A,B) = (1,2),(2,1),(3,2),(2,3)]$.

Svolgimento: Si ha:

$$\begin{aligned}
\Big(1+\sin\frac{1}{n}\Big)^n &= \Big(1+\frac{1}{n}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)^n = \exp\Big(n\log\Big(1+\frac{1}{n}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)\Big)\\
&= \exp\Big(n\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)\Big) = \exp\Big(1-\frac{1}{2n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)\\
&= e\cdot e^{-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})} = e\Big(1-\frac{1}{2n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)\\
&= e-\frac{e}{2n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big).
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\Big(n+n\sin\frac{1}{n}\Big)^n - en^n = n^n\Big(1+\sin\frac{1}{n}\Big)^n - en^n = -n^{n-1}\frac{e}{2}.$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}
\Big(1+\frac{\log n}{n}\Big)^n &= \exp\Big(n\log\Big(1+\frac{\log n}{n}\Big)\Big)\\
&= \exp\Big(n\Big(\frac{\log n}{n}-\frac{\log^2 n}{2n^2}+o\Big(\frac{\log^2 n}{n^2}\Big)\Big)\Big)\\
&= \exp\Big(\log n-\frac{\log^2 n}{2n}+o\Big(\frac{\log^2 n}{n}\Big)\Big) = ne^{-\frac{\log^2 n}{2n}+o(\frac{\log^2 n}{n})}\\
&= n\Big(1-\frac{\log^2 n}{2n}+o\Big(\frac{\log^2 n}{n}\Big)\Big) = n-\frac{\log^2 n}{2}+o\big(\log^2 n\big).
\end{aligned}$$

Pertanto

$$(n+\log n)^n - n^{n+1} = n^n\Big(1+\frac{\log n}{n}\Big)^n - n^{n+1} = -n^n\frac{\log^2 n}{2}+o\big(n^n\log^2 n\big)$$

Infine

$$\big(\log(An+B)\big)^2 = \log^2 n + o(\log^2 n)$$

Si deduce che il limite richiesto vale e.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 3. **[8 punti]** Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}\left(A + (x-1)^{\frac{1}{3}}\right)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, intervalli di concavità/convessità, eventuali punti di non derivabilità, eventuali flessi. (È richiesto lo studio della derivata seconda!)

$[A = -3, -2, 3, 2]$.

Svolgimento: $\boxed{\text{CASO } A > 0}$

Dominio: $\mathbb{R}$.

$$f(1) = f(1 - A^3) = 0, \qquad f(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x > 1 - A^3.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{A(x-1)^{\frac{2}{3}} + x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(A(x-1)^{\frac{2}{3}} - 1\right) = +\infty.$$

Per $x \neq 1$: $f'(x) = \frac{2}{3}A(x-1)^{-\frac{1}{3}} + 1$, pertanto f è crescente per $x \leq 1 - (\frac{2}{3}A)^3$ e $x > 1$ e f è decrescente per $1 - (\frac{2}{3}A)^3 \leq x < 1$.

$\boxed{x = 1 - (\tfrac{2}{3}A)^3 \text{ punti di massimo relativo.}}$

Inoltre

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 1^+} f'(x) = +\infty.$$

$\boxed{x = 1 \text{ punto di cuspide.}}$

Per $x \neq 1$: $f''(x) = -\frac{2}{9}A(x-1)^{-\frac{4}{3}}$, pertanto f è concava per $x < 1$ e per $x > 1$.

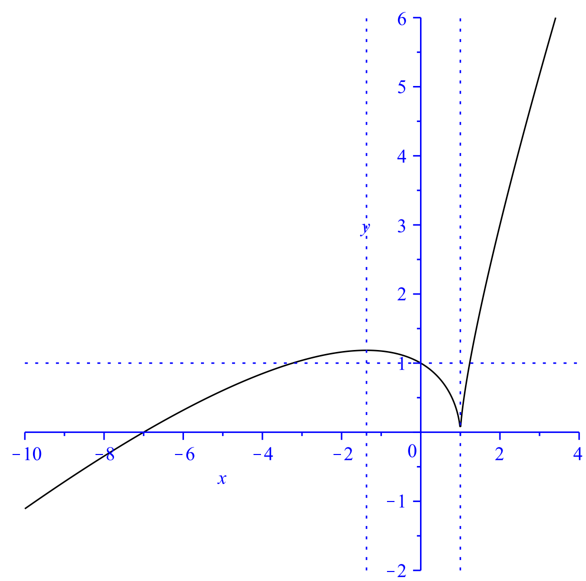

Figura 1. Caso $A = 2$: grafico di $f(x) = (x-1)^{2/3}\left(2 + (x-1)^{1/3}\right)$.

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 4. [**7 punti**] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-A}^{B} \frac{\sqrt{x+A}\cdot\log(x+A)}{(AB+(B-A)x-x^2)^\alpha}dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

$[(A,B) = (2,1),(1,2),(3,1),(1,3)]$

Svolgimento: Risulta:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+A}\cdot\log(x+A)}{(B-x)^\alpha(x+A)^\alpha} \sim \frac{(x+A)^{\frac{1}{2}-\alpha}\log(x+A)}{(B+A)^\alpha} \text{ per } x \to (-A)^+.$$

Segue che f è integrabile in $(-A,0)$ se e solo se $\alpha < \frac{3}{2}$. D'altra parte:

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{B+A}\log(B+A)}{(B+A)^\alpha(B-x)^\alpha} \text{ per } x \to B^-.$$

Segue che f è integrabile in $(0,B)$ se e solo se $\alpha < 1$.
Pertanto f è integrabile in $(-A,B)$ se e solo se $\alpha < 1$.
Calcoliamo l'integrale per $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\int_{-A}^{B} \frac{\sqrt{x+A}\cdot\log(x+A)}{\sqrt{AB+(B-A)x-x^2}}dx = \int_{-A}^{B} \frac{\log(x+A)}{\sqrt{B-x}}dx.$$

Con la sostituzione $\sqrt{B-x} = t$ e, successivamente, integrando per parti

$$\int_{-A}^{B} \frac{\log(x+A)}{\sqrt{B-x}}dx = 2\int_{0}^{\sqrt{B+A}} \log(B+A-t^2)dt.$$

Integrando per parti si ha:

$$\begin{aligned}\int \log(B+A-t^2)dt &= \int (t)'\log(B+A-t^2)dt \\ &= t\log(B+A-t^2) + 2\int \frac{t^2}{B+A-t^2}dt \\ &= t\log(B+A-t^2) - 2t + \sqrt{B+A}\int \Big(\frac{1}{\sqrt{B+A}-t} + \frac{1}{\sqrt{B+A}+t}\Big)dt \\ &= t\log(B+A-t^2) - 2t - \sqrt{B+A}\log\frac{\sqrt{B+A}-t}{\sqrt{B+A}+t} + c.\end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\int_{-A}^{B} \frac{\sqrt{x+A}\cdot\log(x+A)}{\sqrt{AB+(B-A)x-x^2}}dx &= 2\lim_{t\to\sqrt{B+A}^-}\left(t\log(B+A-t^2) - 2t - \sqrt{B+A}\log\frac{\sqrt{B+A}-t}{\sqrt{B+A}+t}\right) \\ &\quad - 2\lim_{t\to 0^+}\left(-t\log(B+A-t^2) - 2t - \sqrt{B+A}\log\frac{\sqrt{B+A}-t}{\sqrt{B+A}+t}\right) \\ &= 2\lim_{t\to\sqrt{B+A}^-}(t-\sqrt{B+A})\log(\sqrt{B+A}-t) \\ &\quad + 4\sqrt{B+A}\log(2\sqrt{B+A}) - 4\sqrt{B+A} \\ &= 4\sqrt{B+A}\big(\log(2\sqrt{B+A}) - 1\big).\end{aligned}$$

Cognome (in STAMPATELLO): .... Nome (in STAMPATELLO):..

Esercizio 5. [5 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - \dfrac{y}{x+x^2} = \log x \\ y(1) = A \end{cases}.$$

$[A = 1, 2, 3, 4]$.

Svolgimento: L'equazione differenziale è lineare del I ordine. Cerchiamo una primitiva della funzione $\frac{1}{x+x^2}$:

$$\int \frac{1}{x+x^2} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\right) dx = \log|x| - \log|x+1| = \log \frac{x}{x+1}.$$

Cerchiamo una primitiva della funzione $\exp(-\log \frac{x}{x+1}) \log x = \frac{x+1}{x} \log x$:

$$\int \frac{x+1}{x} \log x dx = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right) \log x dx = x \log x - x + \frac{\log^2 x}{2}.$$

Si deduce

$$y(x) = \frac{x}{x+1}\left(c + x\log x - x + \frac{\log^2 x}{2}\right),$$

da cui, imponendo la condizione iniziale $y(1) = A$ si determina la costante c:

$$c = 1 + 2A.$$

Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{x}{x+1}\left(1 + 2A + x\log x - x + \frac{\log^2 x}{2}\right).$$