

Università di Roma “Tor Vergata” – Corso di Laurea in Ingegneria
Analisi Matematica I – Prova scritta del 03/09/2021

Cognome: (in STAMPATELLO)
Nome: (in STAMPATELLO)
Matricola:
Titolare del corso:
Prova orale:

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
4	
Totale	

A/B/C/D

Esercizio 1. [8 punti] Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\cos \sqrt{ax} + \frac{a}{2} \sin x \right)^{\frac{b}{x^2}}.$$

$[(a, b) = (2, 6), (3, 8), (4, 5), (5, 2)]$

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y \rightarrow 0^+$:

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + o(y^5), \quad \sin y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^4), \quad e^y = 1 + y + o(y), \quad \log(1 + y) = y + o(y).$$

Pertanto

$$\cos \sqrt{ax} + \frac{a}{2} \sin x = 1 + \frac{a^2 x^2}{24} + o(x^2)$$

da cui segue

$$\log \left(\cos \sqrt{ax} + \frac{a}{2} \sin x \right) = \log \left(1 + \frac{a^2 x^2}{24} + o(x^2) \right) = \frac{a^2 x^2}{24} + o(x^2).$$

Si deduce

$$\begin{aligned} \left(\cos \sqrt{ax} + \frac{a}{2} \sin x \right)^{\frac{b}{x^2}} &= \exp \left(\frac{b}{x^2} \log \left(\cos \sqrt{ax} + \frac{a}{2} \sin x \right) \right) \\ &= \exp \left(\frac{a^2 b}{24} + o(1) \right). \end{aligned}$$

Si conclude che il limite richiesto vale

$$e^{\frac{a^2 b}{24}}.$$

Esercizio 2. [8 punti] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \arcsin \left(\frac{x^2 + a}{b|x| + a} \right)$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

$$[(a, b) = (2, 1), (1, 2), (3, 1), (1, 3)]$$

Svolgimento: f è pari. Dominio: $\{-1 \leq \frac{x^2+a}{b|x|+a} \leq 1\} = \{-b \leq x \leq b\}$. Risulta:

$$f(0) = f(b) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Per $0 < x < b$: $f'(x) = \frac{bx^2+2ax-ab}{(bx+a)\sqrt{(bx+a)^2-(x^2+a)^2}}$, pertanto f è decrescente per $0 \leq x \leq \frac{-a+\sqrt{a^2+ab^2}}{b}$ e f è crescente per $\frac{-a+\sqrt{a^2+ab^2}}{b} \leq x \leq b$.

$x = 0, x = b$ punti di massimo relativo, $x = \frac{-a+\sqrt{a^2+ab^2}}{b}$ punto di minimo relativo.

$$f\left(\frac{-a+\sqrt{a^2+ab^2}}{b}\right) = \arcsin \frac{2a^2+2ab^2-2a\sqrt{a^2+ab^2}}{b^2\sqrt{a^2+ab^2}}.$$

Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f'(x) = +\infty.$$

$x = 0$ punto di cuspidè.

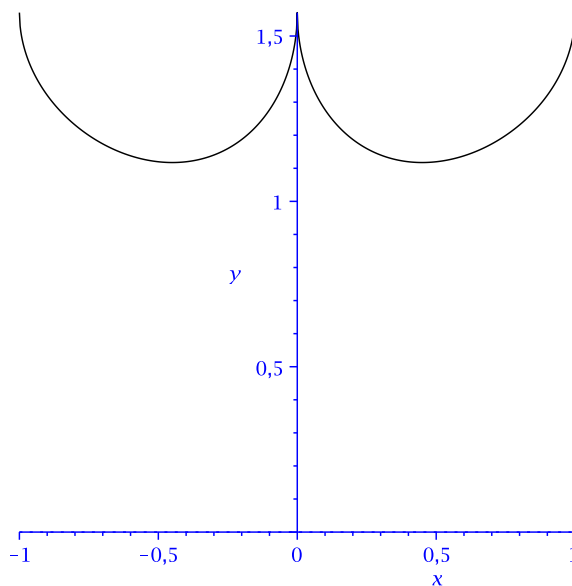


FIGURA 1. Grafico di $f(x) = \arcsin \left(\frac{x^2 + 2}{|x| + 2} \right)$.

Esercizio 3. [8 punti] Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^{2a} \frac{\log(x^2 - a^2)}{(x - a)^\alpha} dx.$$

Calcolarlo per $\alpha = 0$.

$[a = 2, 3, 4, 5]$

Svolgimento: Risulta:

$$f(x) \sim \frac{\log(x - a)}{(x - a)^\alpha} \text{ per } x \rightarrow a^-$$

Pertanto f è integrabile in $(a, 2a)$ se e solo se $\alpha < 1$.

Calcoliamo l'integrale per $\alpha = 0$:

$$\int_a^{2a} \log(x^2 - a^2) dx.$$

Usando l'integrazione per parti:

$$\int \log(x^2 - a^2) dx = x \log(x^2 - a^2) - 2 \int \frac{x^2}{x^2 - a^2} dx$$

Calcoliamo l'ultimo integrale:

$$\int \frac{x^2}{x^2 - a^2} dx = \int \left(1 + \frac{a^2}{x^2 - a^2} \right) = x + \frac{a}{2} \int \left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a} \right) dx = x + \frac{a}{2} \log \frac{x - a}{x + a} + c.$$

Pertanto

$$\int \log(x^2 - a^2) dx = (x - a) \log(x - a) + (x + a) \log(x + a) - 2x + c.$$

Si conclude:

$$\begin{aligned} \int_a^{2a} \log(x^2 - a^2) dx &= a \log(a) + 3a \log(3a) - 4a \\ &\quad - \lim_{x \rightarrow a^+} \left((x - a) \log(x - a) + (x + a) \log(x + a) - 2x \right) \\ &= a \log(a) + 3a \log(3a) - 2a \log(2a) - 2a. \end{aligned}$$

Esercizio 4. [6 punti] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - \frac{y}{x} = \frac{a \log x}{\sqrt{1 + \log x}} \\ y(1) = a \end{cases}$$

$$[a = 2, 3, 4, 6]$$

Svolgimento: L'equazione differenziale è lineare del primo ordine.

Cerchiamo una primitiva della funzione $-\frac{1}{x}$:

$$\int -\frac{1}{x} dx = -\log x.$$

Cerchiamo ora una primitiva della funzione $e^{-\log x} \frac{a \log x}{\sqrt{1 + \log x}} = \frac{a \log x}{x \sqrt{1 + \log x}}$: con la sostituzione $\log x = t$:

$$\begin{aligned} \int \frac{a \log x}{x \sqrt{1 + \log x}} dx &= \int \frac{at}{\sqrt{1 + t}} dt = a \int \left(\sqrt{1 + t} - \frac{1}{\sqrt{1 + t}} \right) dt \\ &= \frac{2}{3} a (1 + t)^{3/2} - 2a \sqrt{1 + t} + c \\ &= \frac{2}{3} a (1 + \log x)^{3/2} - 2a \sqrt{1 + \log x} + c. \end{aligned}$$

Si deduce

$$y(x) = e^{\log x} \left(c + \frac{2}{3} a (1 + \log x)^{3/2} - 2a \sqrt{1 + \log x} \right) = x \left(c + \frac{2}{3} a (1 + \log x)^{3/2} - 2a \sqrt{1 + \log x} \right),$$

da cui, imponendo la condizione iniziale $y(1) = a$, si determina la costante c :

$$c = \frac{7}{3} a.$$

Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = x \left(\frac{7}{3} a + \frac{2}{3} a (1 + \log x)^{3/2} - 2a \sqrt{1 + \log x} \right).$$