

Appunti rivisitati del corso di
TEORIA DELLE RAPPRESENTAZIONI¹

Emanuele Sacco
emanuelesacco@gmail.com

7 agosto 2009

¹Tenuto dal Prof. GIOVANNI GAIFFI nell'anno accademico 2008-2009

Indice

1	Rappresentazioni	4
1.1	Definizioni	4
1.2	Completa riducibilità; lemma di Schur	5
1.3	Rappresentazioni irriducibili di S_3	7
2	Teoria dei caratteri	10
2.1	Caratteri	10
2.2	La prima formula di proiezione	11
2.3	Tavole di S_4 e A_4	13
2.4	Altre formule di proiezione	14
2.5	Rappresentazioni indotte	15
2.6	Il gruppo diedrale	19
2.6.1	Il caso pari	19
2.6.2	Il caso dispari	20
2.7	Tavole di S_5 e A_5	21
3	Rappresentazioni del gruppo simmetrico	24
3.1	Definizioni	24
3.2	Rappresentazioni irriducibili	26
3.3	Due esercizi	29
4	Anello delle funzioni simmetriche	32
4.1	Funzioni simmetriche elementari	33
4.1.1	Kronecker	35
4.1.2	Funzioni polinomiali su $M_{n \times n}(\mathbb{C})$	35
4.2	Funzioni simmetriche complete	36
4.3	Somme di potenze	37
4.4	Funzioni di Schur	39
4.5	Ortogonalità	41
4.6	I caratteri dei gruppi simmetrici	43
4.7	Due esercizi	49

INDICE

4.8	La regola di Littlewood-Richardson (facoltativo)	50
4.8.1	Diagrammi skew	50
4.8.2	Funzioni di Schur skew	51
4.8.3	Dimostrazione della regola	52
4.9	Dimensioni con gli uncini	57
5	Il teorema di Chevalley, Shephard-Todd	60
5.1	Preliminari	60
5.2	Dimostrazione	61
5.2.1	Finita generazione	61
5.2.2	Un criterio di divisibilità	62
5.2.3	Lemma chiave	63
5.2.4	$(C) \Rightarrow (A)$	64
5.2.5	$(C) \Rightarrow (B)$	65
5.2.6	Unicità dei gradi	66
5.2.7	$(B) \Rightarrow (A)$	67
5.2.8	Autovalori	68
5.2.9	Somma e prodotto dei gradi	69
5.2.10	Criterio di indipendenza algebrica	70
5.2.11	$(A) \Rightarrow (C)$	71
6	Rappresentazioni di $GL(V)$	73
6.1	Funtori di Schur e loro caratteri	73
6.2	Dimostrazioni	75
	Bibliografia	79

Capitolo 1

Rappresentazioni

In questo capitolo vengono date le definizioni di base della teoria delle rappresentazioni dei gruppi finiti, mostrando che ogni rappresentazione è somma diretta di rappresentazioni irriducibili. Viene sviluppata la teoria delle rappresentazioni dei gruppi abeliani e si trovano tutte le rappresentazioni irriducibili del gruppo simmetrico S_3 .

1.1 Definizioni

Definizione 1.1. Sia G un gruppo finito. Una G -rappresentazione è un omomorfismo $\rho : G \rightarrow GL(V)$ dove V è uno spazio vettoriale di dimensione finita su \mathbb{C} .

Equivalentemente, diremo che V è un G -modulo. Quando non c'è ambiguità sulla mappa ρ , chiamiamo V stesso una rappresentazione di G e scriveremo gv al posto di $\rho(g)(v)$. La dimensione di V è chiamata *grado* della rappresentazione.

Supponiamo di avere due G -rappresentazioni V e W ; un omomorfismo di G -rappresentazioni (una mappa di G -moduli) φ è un'applicazione lineare $\varphi : V \rightarrow W$ che soddisfa $\varphi(gv) = g(\varphi(v))$ per ogni $g \in G$ e $v \in V$, ovvero una applicazione lineare φ per cui commuta il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & W \\ \downarrow g & & \downarrow g \\ V & \xrightarrow{\varphi} & W \end{array}$$

Osserviamo che se φ è una mappa di G -rappresentazioni, allora $\ker \varphi$, $\text{Im } \varphi$ e $\text{coker } \varphi$ sono G -rappresentazioni.

Definizione 1.2. Una *sottorappresentazione* di una G -rappresentazione V (equivalentemente un sotto G -modulo), è un sottospazio vettoriale W di V tale che $gw \in W$ per ogni $g \in G$ e $w \in W$.

Definizione 1.3. Una G -rappresentazione non nulla, si dice *irriducibile* se non ammette sottorappresentazioni eccetto 0 e se stessa.

Consideriamo il gruppo simmetrico S_3 ; ovviamente S_3 agisce su \mathbb{C}^3 (e scriviamo $S_3 \curvearrowright \mathbb{C}^3$) permutando le variabili. \mathbb{C}^3 non è una rappresentazione irriducibile perché c'è il sottomodulo $H = \{z(1, 1, 1) : z \in \mathbb{C}\}$ di dimensione 1.

Vediamo adesso come è possibile costruire delle rappresentazioni, partendo da una o più rappresentazioni date.

Se abbiamo V e W due G -rappresentazioni, allora anche la somma diretta $V \oplus W$ e il prodotto tensoriale $V \otimes W$ sono G -rappresentazioni, dove G agisce su $V \otimes W$, ponendo

$$g(v \otimes w) = (gv \otimes gw).$$

Anche nel caso in cui V e W siano due rappresentazioni irriducibili, sapere come si decompone $V \otimes W$ è un problema piuttosto difficile.

Nello stesso modo si può costruire la G -rappresentazione $V^{\oplus n}$. Anche il prodotto esterno $\bigwedge^k V$ con l'azione $g(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k) = gv_1 \wedge gv_2 \wedge \cdots \wedge gv_k$ e le potenze simmetriche $\text{Sym}^n(V)$ sono G -rappresentazioni (sono sottorappresentazioni di $V^{\oplus n}$).

Il duale V^* , è ancora un G -modulo, ponendo per $\varphi \in V^*$

$$g\varphi(v) = \varphi(g^{-1}v) \quad \forall v \in V.$$

Questa azione si comporta bene con il pairing naturale tra V^* e V , ovvero se $\langle \cdot, \cdot \rangle : V^* \times V \rightarrow \mathbb{C}$, risulta $\langle \varphi, v \rangle = \langle g\varphi, gv \rangle$ per ogni $g \in G$, $v \in V$ e $\varphi \in V^*$.

Consideriamo adesso $\text{Hom}(V, W)$ con l'azione di G definita ponendo per $\theta \in \text{Hom}(V, W)$

$$g\theta = g\theta(g^{-1}v).$$

Osserviamo che poiché $\text{Hom}(V, W) \simeq V^* \otimes W$, l'azione non poteva essere definita in modo diverso.

Osserviamo che se X è un insieme finito su cui G agisce, possiamo definire V lo spazio vettoriale una cui base è data da $\{e_x : x \in X\}$ e c'è una azione di G su V ponendo

$$g \sum_{x \in X} a_x e_x = \sum_{x \in X} a_x e_{gx}.$$

V prende il nome di rappresentazione di permutazione associata all'insieme X . Quando G agisce su se stesso con la moltiplicazione a sinistra, da origine alla *rappresentazione regolare* denotata con R_G .

1.2 Completa riducibilità; lemma di Schur

A questo punto viene naturale chiedersi se si possa sempre decomporre una rappresentazione in sottorappresentazioni irriducibile. La risposta è questa domanda è il seguente

Teorema 1.1. *Ogni G -rappresentazione V si decompone in somma diretta di rappresentazioni irriducibili.*

Dimostrazione. Sia W un sotto G -modulo; se mostriamo che è possibile trovare un suo complementare che è ancora un G -modulo, abbiamo finito (infatti si potrebbe procedere per induzione). Sia H_0 un prodotto scalare ermitiano su V e poniamo

$$H(v, w) := \sum_{g \in G} H_0(gv, gw).$$

Osserviamo che, per la finitezza di G , H è un prodotto scalare ermitiano G -invariante, ovvero per ogni $\gamma \in G$ e $v, w \in V$ risulta $H(\gamma v, \gamma w) = H(v, w)$. A questo punto se W è un sotto G -modulo, W^\perp è il suo complementare ed è ancora un G -modulo; infatti sia $u \in W^\perp$, $v \in W$ e $g \in G$, allora

$$H(w, gu) = H(g^{-1}w, u) = 0.$$

□

La dimostrazione non funziona in generale per campi finiti; in quel caso dipende sia da $|G|$ che dalla caratteristica del campo.

Se G è un gruppo infinito, ma topologico e compatto, allora è possibile definire

$$H(v, w) = \int_G H_0(\cdot, \cdot)$$

e tutto funziona.

Se rimuoviamo l'ipotesi di finitezza su G , il teorema di completa riducibilità non vale sempre. Consideriamo per esempio $(\mathbb{R}, +) \curvearrowright \mathbb{R}^2$ dove per ogni $a \in \mathbb{R}$ e $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ si pone

$$a\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}.$$

Ovviamente $R_1 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è una sotto rappresentazione. Facciamo vedere che non amette un complementare; infatti se esiste $R_2 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ allora anche $\begin{pmatrix} \gamma + a\delta \\ \gamma \end{pmatrix} \in R_2$ e scegliendo a tale che la prima componente si annulli, si ottiene $R_2 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ che non è una G -rappresentazione.

Teorema 1.2 (Lemma di Schur). *Sia φ una mappa di G -moduli, $\varphi : V \rightarrow W$ con V e W irriducibili; allora vale*

1. $\varphi = 0$ oppure φ è un isomorfismo.
2. Se $V = W$ allora $\varphi = \lambda I$ con $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dimostrazione. Poiché $\ker \varphi$ è un G -sottomodulo di V e V è irriducibile, abbiamo che $\ker \varphi = 0$ oppure $\ker \varphi = V$. Analogamente per $\text{Im } \varphi$. Sia ora λ un autovalore di φ ; allora $\varphi - \lambda I$ è una mappa di G -moduli e per il punto 1 si deve avere $\ker(\varphi - \lambda I) = V$ (essendo $\ker \varphi \neq 0$).

□

Sia adesso G un gruppo (finito) abeliano e V una G -rappresentazione. La mappa

$$h \cdot : V \rightarrow V$$

con $h \in G$ è una mappa di G -moduli, infatti $h(gv) = g(hv)$ perché G è abeliano. Se V è irriducibile, $h \cdot = \lambda_h I$, cioè $h(v) = \lambda_h v$ per ogni $v \in V$. Quindi ogni sottospazio di V è G -invariante da cui si conclude che V è irriducibile se e solo se ha dimensione 1.

Esempio 1. Siano $G = C_m = \langle c \rangle$ e $V = \langle v \rangle$ un G -modulo. Allora $cv = \lambda_c v$ da cui elevando alla m otteniamo $v = c^m v = \lambda_c^m v$ da cui $\lambda_c^m = 1$. Si conclude che tutte le rappresentazioni irriducibili di C_m sono quelle generate da $c \rightarrow \omega^i$ con ω radice primitiva m -esima di 1.

Seppure possa sembrare futile studiare le rappresentazioni dei gruppi abeliani, è bene notare che

$$Z(G) \triangleleft G \curvearrowright V$$

e l'azione di $Z(G)$ su V , mi da informazioni sull'azione di G su V .

Sia V una G -rappresentazione. Allora, come corollario del lemma di Shur, si ha che

$$V = V_1^{\oplus k_1} \oplus V_2^{\oplus k_2} \oplus \dots \oplus V_r^{\oplus k_r}$$

dove le V_i sono irriducibili e a due a due non isomorfe. In più vale

Proposizione 1.3. *In tale decomposizione, V_i e k_i sono univocamente determinati. Sono inoltre univocamente determinati i sottospazi $V_i^{\oplus k_i}$ che prendono il nome di componenti isotopiche di tipo V_i .*

Dimostrazione. Supponiamo che

$$V = V_1^{\oplus k_1} \oplus V_2^{\oplus k_2} \oplus \dots \oplus V_r^{\oplus k_r} = W_1^{\oplus t_1} \oplus W_2^{\oplus t_2} \oplus \dots \oplus W_s^{\oplus w_s}$$

e consideriamo $id : V \rightarrow V$ mappa di G -moduli. Allora consideriamo

$$V_1 \hookrightarrow V_1^{\oplus k_1} \hookrightarrow V \xrightarrow{id} V \xrightarrow{\pi} W_j^{\oplus t_j} \rightarrow W_j.$$

Se $V_1 \not\cong W_j$ la mappa è 0; ma id ha $\ker = 0$ quindi esiste j tale che $V_1 \cong W_j$; a meno di riordinare i termini posso supporre $V_1 \cong W_1$ e per ragioni dimensionali si ha che $V_1^{\oplus k_1} \rightarrow V_1^{\oplus t_1}$ è biunivoca e dunque $k_1 = t_1$. \square

1.3 Rappresentazioni irriducibili di S_3

Consideriamo il gruppo simmetrico S_3 . Ovviamente se $V = \langle v \rangle$ e poniamo $\sigma(v) = v$ per ogni $\sigma \in G$, otteniamo la rappresentazione banale di dimensione 1, che indichiamo con il simbolo

$\square\square\square$.

Un'altra azione di S_3 su V è quella che si ottiene ponendo $\sigma(v) = \text{sig}(\sigma)v$ che da origine ad un'altra rappresentazione di dimensione 1 (la rappresentazione segno) che indichiamo con

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}.$$

Come avevamo già osservato, $S_3 \uparrow \mathbb{C}^3$ permutando le variabili e si ha

$$\mathbb{C}^3 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$

Sia $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ con $a + b + c = 0$ e supponiamo che $L = \langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \rangle$ sia S_3 invariante. Senza perdita di generalità posso supporre che $a \neq 0$ e $b \neq a$. Allora (12) $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \\ c \end{pmatrix}$ e L contiene sia $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ che $\begin{pmatrix} b \\ a \\ c \end{pmatrix}$; ma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \\ c & c \end{pmatrix}$ ha rango 2 a meno che $b = -a$ e $c = 0$. In tal caso però (13) $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ a \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ ha rango 2, contro l'ipotesi che L sia 1-dimensionale.

Dunque $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$ è una S_3 -rappresentazione irriducibile (rappresentazione standard) e si indica con

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}.$$

Mostriamo ora che queste tre sono le uniche rappresentazioni irriducibili di S_3 . Sia W una qualunque S_3 -rappresentazione, allora $C_3 \triangleleft S_3 \uparrow W$.

Sia $C_3 = \langle \tau \rangle$; allora, rispetto all'azione di C_3 , W si decompone in

$$W = \bigoplus V_i$$

con $V_i = \mathbb{C}v_i$ e $\tau v_i = \omega^{\alpha_i} v_i$, con $\omega = e^{\frac{2\pi}{3}}$.

Vediamo come agiscono gli altri elementi di S_3 . Sia σ una trasposizione; allora $\tau\sigma = \sigma\tau^2$ e quindi se v è un autovettore di τ con autovalore ω^i , si ha

$$\tau(\sigma(v)) = \sigma(\tau(v)^2) = \sigma(\omega^{2i}v) = \omega^{2i}\sigma(v),$$

cioè $\sigma(v)$ è un autovettore di τ con autovalore ω^{2i} .

Se $\omega^i \neq 1$, si ha che v e $\sigma(v)$ sono indipendenti e dunque generano un sottospazio V' di W che è G -invariante; V' è isomorfa alla rappresentazione standard. Se $\omega^i = 1$ v e $\sigma(v)$ possono essere indipendenti o no. Se non lo sono, allora v genera una sottorappresentazione uno dimensionale di W isomorfa alla rappresentazione banale e $\sigma(v)$ genera una sottorappresentazione uno dimensionale di W isomorfa alla rappresentazione segno. Se invece v e $\sigma(v)$ sono indipendenti, $v + \sigma(v)$ e $v - \sigma(v)$ generano due rappresentazioni uno dimensionali di W isomorfe rispettivamente a quella banale e quella segno.

Consideriamo ora l' S_3 -modulo $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$ e siano $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ due generatori della rappresentazione standard. Dunque

$$\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix} = \langle \alpha \otimes \alpha, \alpha \otimes \beta, \beta \otimes \alpha, \beta \otimes \beta \rangle$$

Vediamo come agiscono gli elementi (12) e (123) sulla base.

$$(12)\alpha = -\alpha$$

$$(12)\beta = \alpha + \beta$$

$$(12)\alpha \otimes \alpha = \alpha \otimes \alpha$$

$$(12)\alpha \otimes \beta = -\alpha \otimes (\alpha + \beta)$$

$$(12)\beta \otimes \alpha = -(\alpha + \beta) \otimes \alpha$$

$$(12)\beta \otimes \beta = (\alpha + \beta) \otimes (\alpha + \beta)$$

$$(123)\alpha = \beta$$

$$(123)\beta = -\alpha + -\beta$$

$$(123)\alpha \otimes \alpha = \beta \otimes \beta$$

$$(123)\alpha \otimes \beta = -\beta \otimes (\alpha + \beta)$$

$$(123)\beta \otimes \alpha = -(\alpha + \beta) \otimes \beta$$

$$(123)\beta \otimes \beta = (\alpha + \beta) \otimes (\alpha + \beta)$$

Se ne deduce che $\alpha \otimes \alpha$ e $\beta \otimes \beta$ generano un sottospazio di dimensione 2 G -invariante isomorfo alla rappresentazione standard. $\alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha$ e $\alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha$ generano due sottospazi uno dimensionali isomorfi rispettivamente alla rappresentazione segno e a quella banale. In conclusione abbiamo

$$\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix} \otimes \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix}.$$

Capitolo 2

Teoria dei caratteri

In questo capitolo viene sviluppata la teoria dei caratteri. In particolare si dimostra che i caratteri delle rappresentazioni irriducibili costituiscono una base ortonormale per lo spazio delle funzioni di classe su G .

2.1 Caratteri

Definizione 2.1. Sia V una G -rappresentazione. Il suo *carattere* χ_V è la funzione $\chi_V : G \rightarrow \mathbb{C}$ definita ponendo

$$\chi_V(g) = \text{Tr}(g|_V).$$

Osserviamo che per come è definita, $\chi_V(h^{-1}gh) = \chi_V(g)$ e dunque χ_V è costante sulle classi di coniugio. Una funzione con questa proprietà è chiamata *funzione di classe*. Notiamo inoltre che $\chi_V(1) = \dim V$.

Proposizione 2.1. *Siano V e W due G -rappresentazioni. Allora*

1. $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$.
2. $\chi_{V \otimes W} = \chi_V \chi_W$.
3. $\chi_{V^*} = \bar{\chi}_V$.
4. $\chi_{\Lambda^2 V}(g) = \frac{1}{2}[\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2)]$.
5. $\chi_{\text{Sym}^2 V}(g) = \frac{1}{2}[\chi_V(g)^2 + \chi_V(g^2)]$.

Dimostrazione. Determiniamo i valori dei caratteri su un elemento fissato $g \in G$. Supponiamo che per l'azione di g , V abbia autovalori $\{\lambda_i\}$ e W abbia autovalori μ_j . Allora $\{\lambda_i\} \cup \{\mu_j\}$ e $\{\lambda_i \cdot \mu_j\}$ sono gli autovalori rispettivamente di $V \oplus W$ e $W \otimes W$. Analogamente $\{\lambda_i^{-1} = \bar{\lambda}_i\}$ sono gli autovalori di g su

V^* , poiché gli autovalori sono radici n -esime dell'unità dove n è l'ordine di G . $\{\lambda_i \lambda_j : i < j\}$ sono gli autovalori di g su $\bigwedge^2 V$ e

$$\sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j = \frac{(\sum \lambda_i)^2 - \sum \lambda_i^2}{2}$$

e poiché g^2 ha autovalori $\{\lambda_i^2\}$ anche il punto 4 segue. Il punto 5 segue dall'osservazione che $V^{\otimes 2} \cong \bigwedge^2 V \oplus \text{Sym}^2 V$ e dal punto 1. \square

Osserviamo che se V è la rappresentazione di permutazione associata all'azione di G su un insieme finito X , $\chi_V(g)$ è il numero di elementi di X , lasciati fissi da g .

Costruiamo ora la tavola dei caratteri di S_3 . Abbiamo già visto che le uniche rappresentazioni irriducibili di S_3 sono la banale, la segno e la standard. Le classi di coniugio di S_3 sono ovviamente tre, $[1]$, $[(12)]$, $[(123)]$. La rappresentazione banale assume valore 1 su ognuna delle classi, mentre la rappresentazione segno assume il valore 1 su $[1]$ e $[(123)]$ e il valore -1 su $[(12)]$. Per quanto riguarda la standard, ricordiamo che $\mathbb{C}^3 = \text{banale} + \text{standard}$ e passando ai caratteri si ottiene la seguente tabella

S_3	1	(12)	(123)
banale	1	1	1
segno	1	-1	1
standard	2	0	-1

Riconsideriamo adesso il problema di scomporre la rappresentazione

$$V = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$$

in rappresentazioni irriducibili, ma affrontiamolo dal punto di vista dei caratteri. Si ha che $\chi_V = (4, 0, 1)$ che si scrive in modo unico come

$$(4, 0, 1) = (1, 1, 1) + (1, -1, 1) + (2, 0, -1)$$

infatti i vettori riga della tavola dei caratteri di S_3 sono linearmente indipendenti.

2.2 La prima formula di proiezione

Sia V una G -rappresentazione qualunque e poniamo

$$V^G = \{v \in V : gv = v \ \forall g \in G\}.$$

Notiamo che se $g \in G$, l'endomorfismo $g : V \rightarrow V$ non è in generale un omomorfismo di G -moduli; possiamo però costruirne uno ponendo

$$\varphi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g.$$

Proposizione 2.2. *La mappa φ è una proiezione di V su V^G .*

Dimostrazione. Supponiamo $v = \varphi(w)$, allora per ogni $h \in G$ vale $hw = v$ e dunque $\text{Im } \varphi \subseteq V^G$. Viceversa se $v \in V^G$ è facile verificare che $\varphi(v) = v$ da cui segue la tesi. \square

In più si ha

$$m = \dim V^G = \text{Tr}(\varphi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{Tr}(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g).$$

In particolare se V è una rappresentazione irriducibile, diversa dalla banale, la somma su tutti i $g \in G$ del valore di χ_V è zero.

Se V e W sono due G -rappresentazioni, $\text{Hom}(V, W)^G \cong \text{Hom}_G(V, W)$. Per il lemma di Shur, se V e W sono irriducibili,

$$\dim(\text{Hom}_G(V, W)) = \begin{cases} 1 & V \cong W \\ 0 & V \not\cong W \end{cases}$$

Ma $\text{Hom}(V, W) = V^* \otimes W$ e dunque

$$\chi_{\text{Hom}(V, W)}(g) = \overline{\chi_V(g)} \chi_W(g)$$

e otteniamo dunque la formula

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_V(g)} \chi_W(g) = \begin{cases} 1 & V \cong W \\ 0 & V \not\cong W \end{cases}.$$

Più in generale, se indichiamo con $\mathbb{C}_{\text{class}}(G)$ l'insieme delle funzioni di classe su G , possiamo definirci un prodotto scalare Hermitiano ponendo

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\alpha(g)} \beta(g).$$

Per quanto osservato prima vale il seguente

Teorema 2.3. *In termini del prodotto scalare Hermitiano definito sopra, i caratteri di rappresentazioni irriducibili sono ortonormali.*

Corollario 2.4. *Il numero di rappresentazioni irriducibili di G è minore o uguale al numero di classi di coniugio di G .*

Corollario 2.5. *Ogni rappresentazione è determinata dal suo carattere.*

Corollario 2.6. *Una rappresentazione V è irriducibile se e solo se*

$$\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1.$$

Corollario 2.7. *Se $V \cong V_1^{\oplus a_1} \oplus \dots \oplus V_k^{\oplus a_k}$ è la decomposizione di V in rappresentazioni irriducibili, allora*

$$a_i = \langle \chi_V, \chi_{V_i} \rangle.$$

Sia R la rappresentazione regolare di G . È semplice verificare che

$$\chi_R(g) = \begin{cases} 0 & g \neq 1 \\ |G| & g = 1 \end{cases}$$

ovviamente R non è irriducibile e anzi, ogni rappresentazione irriducibile V compare in R $\dim V$ volte. In particolare vale la formula

$$|G| = \dim R = \sum_i \dim(V_i)^2$$

dove la somma è fatta su tutte le rappresentazioni irriducibili. In più se calcoliamo il carattere della rappresentazione regolare in un elemento $g \neq 1$, otteniamo

$$0 = \sum (\dim V_i) \chi_{V_i}(g).$$

2.3 Tavole di S_4 e A_4

Il numero di classi di coniugio di S_4 è 5: la classe dell'1 che contiene solo un elemento, la classe di (12), che ne contiene 6, la classe di (123) che ne contiene 8, la classe di (1234) che ne contiene 6 e la classe di (12)(34) che ne contiene 3.

Come in S_3 , anche qui ci sono la rappresentazione banale e la segno che riferite a S_4 indicheremo rispettivamente con

$$\square\square\square\square \quad \begin{matrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{matrix}.$$

S_4 agisce su \mathbb{C}^4 permutando le variabili e si ha

$$\mathbb{C}^4 = \square\square\square\square \oplus V$$

dove V è una rappresentazione irriducibile di dimensione 3 (infatti vale $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$), ed è detta standard e la indichiamo con

$$\begin{matrix} \square & \square \\ \square & \end{matrix}.$$

Se U è la rappresentazione segno, $V' = V \otimes U$ è ancora una rappresentazione irriducibile e ha sempre dimensione 3.

$|S_4| = 24$ dunque manca ancora una rappresentazione di dimensione 2 e il suo carattere si può trovare sfruttando la relazione di ortogonalità.

In definitiva, la tavola dei caratteri di S_4 è

S_4	1	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
banale	1	1	1	1	1
segno	1	-1	1	-1	1
standard	3	1	0	-1	-1
V'	3	-1	0	1	-1
altra	2	0	-1	0	2

A_4 ha quattro classi di coniugio, quella dell'1, quella di (123) di quattro elementi, quella di (132) sempre di quattro elementi e quella di (12)(34) di 3 elementi.

Tre rappresentazioni irriducibili, vengono dalle rappresentazioni di

$$A_4/\{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \cong C_3$$

L'altra rappresentazione irriducibile si trova con le relazioni di ortogonalità e risulta

A_4	1	(123)	(132)	(12)(34)
banale	1	1	1	1
ωI	1	ω	ω^2	1
$\omega^2 I$	1	ω^2	ω	1
V	3	0	0	-1

2.4 Altre formule di proiezione

Proposizione 2.8. *Sia $\alpha : G \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione sul gruppo G ; per ogni G -rappresentazione V , poniamo*

$$\varphi_{\alpha, V} = \sum_{g \in G} \alpha(g) \cdot g : V \rightarrow V.$$

Allora $\varphi_{\alpha, V}$ è un omomorfismo di G -moduli per ogni V se e solo se α è una funzione di classe.

Dimostrazione. Supponiamo che α sia una funzione di classe. Allora vale la seguente catena di ugualianza

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha, V}(hv) &= \sum \alpha(g)g(hv) = \sum \alpha(hgh^{-1})hgh^{-1}(hv) = \\ &= h \left(\sum \alpha(hgh^{-1})g(v) \right) = h \left(\sum \alpha(g)g(v) \right) = h\varphi_{\alpha, V}(v). \end{aligned}$$

Se invece α non è una funzione di classe, esistono \bar{g} e \bar{h} tali che $\alpha(\bar{g}) \neq \alpha(\bar{h}\bar{g}\bar{h}^{-1})$. Supponiamo che $\varphi_{\alpha, V}$ sia omomorfismo di G -moduli per ogni V e consideriamo la rappresentazione regolare; valutiamo $\varphi_{\alpha, \mathbb{C}G}$ in e e otteniamo

$$\sum \alpha(g)\bar{h}g = \sum \alpha(\bar{h}g\bar{h}^{-1})\bar{h}g.$$

Ma per $g = \bar{g}$ si ha l'assurdo. □

Come immediata conseguenza si ha la seguente

Proposizione 2.9. *Il numero delle rappresentazioni irriducibili di G è uguale al numero di classi di coniugio di G . Equivalentemente, i loro caratteri χ_V formano una base ortonormale per $\mathbb{C}_{\text{class}}(G)$.*

Dimostrazione. Supponiamo $\alpha : G \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione di classe e $\langle \alpha, \chi_V \rangle = 0$ per ogni rappresentazione irriducibile V ; vogliamo mostrare che $\alpha = 0$. Consideriamo l'endomorfismo

$$\varphi_{\alpha, V} = \sum \alpha(g)g : V \rightarrow V;$$

per il lemma di Schur, $\varphi_{\alpha, V} = \lambda I$ e se $n = \dim V$, si ha

$$\lambda = \frac{1}{n} \text{tr}(\varphi_{\alpha, V}) = \frac{1}{n} \sum \alpha(g)\chi_V(g) = \frac{|G|}{n} \langle \alpha, \chi_{V^*} \rangle = 0.$$

Dunque $\varphi_{\alpha, V} = 0$ ovvero $\sum \alpha(g)g = 0$ per ogni rappresentazione V . In particolare se prendiamo V la rappresentazione regolare, gli elementi $g(e)$ sono indipendenti e dunque segue che $\alpha(g) = 0$ per ogni $g \in G$. □

Un altro modo per esprimere questa proposizione è attraverso la *rappresentazione anello* di G .

La rappresentazione anello $R(G)$ è l'insieme delle combinazioni a coefficienti interi $\sum a_i V_i$, dove i V_i sono rappresentazioni irriducibili di G dove il prodotto è definito ponendo

$$\sum a_i V_i \cdot \sum b_j W_j = \sum a_i b_j V_i \otimes W_j.$$

Il carattere definisce una ovvia mappa

$$\begin{aligned} \chi : R(G) &\rightarrow \mathbb{C}_{\text{class}}(G) \\ \sum a_i V_i &\rightarrow \sum a_i \chi(V_i) \end{aligned}$$

che risulta un omomorfismo di anelli iniettivo. In più

$$R(G) \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C}_{\text{class}}(G).$$

2.5 Rappresentazioni indotte

Abbiamo già trovato le rappresentazioni irriducibili di S_4 e A_4 .

Osserviamo che poiché $A_4 \leq S_4$, una azione di S_4 su uno spazio vettoriale V , si può *restringere* ad una azione di A_4 su V . Questa azione da origine ad una A_4 -rappresentazione che indichiamo con $\text{Res}_{A_4}^{S_4} V$.

In particolare, applicando questo ragionamento a tutte le rappresentazioni irriducibili di S_4 , si ha

$$\begin{array}{ll}
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} & \rightarrow & \text{identità} \\
 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \hline \end{array} & \rightarrow & \text{identità} \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \square & \square \\ \hline \end{array} & \rightarrow & W \\
 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \square \\ \square \\ \hline \end{array} & \rightarrow & W \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \square & \square \\ \hline \end{array} & \rightarrow & \omega I \oplus \omega^2 I
 \end{array}$$

Ovviamente se G è un gruppo e H un suo qualunque sottogruppo, per ogni G -rappresentazione V , si può sempre fare $\text{Res}_H^G(V)$. Qualora H e G siano chiari dal contesto, li si potrà omettere scrivendo semplicemente $\text{Res } V$.

Vediamo ora come si può costruire una rappresentazione di un gruppo G , a partire da una rappresentazione di un suo sottogruppo H .

Consideriamo dunque V una G -rappresentazione e $W \subset V$ un sottospazio H -invariante. Per ogni $g \in G$, gW dipende solo dalla classe laterale gH , dunque $ghW = gW$. Sia $\sigma \in G/H$ e scriviamo σW per questo sottospazio di V . Diciamo che V è *indotta* da W se ogni elemento in V può essere scritto in modo unico come somma di elementi in qualche traslato di W , cioè

$$V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} \sigma W.$$

In questo caso scriveremo $V = \text{Ind}_H^G W$. Qualora H e G siano chiari dal contesto, li si potrà omettere scrivendo semplicemente $V = \text{Ind } W$.

Esempio 2. La rappresentazione di permutazione associata all'azione di G sulle sue classi laterali modulo H è indotta dalla rappresentazione banale W di H . In questo caso V ha base $\{e_\sigma : \sigma \in G/H\}$ e $W = \mathbb{C}e_H$.

Esempio 3. La rappresentazione regolare di G è indotta dalla rappresentazione regolare di H . V ha base $\{e_g : g \in G\}$ e W ha base $\{e_h : h \in H\}$.

Vediamo ora che presa una H -rappresentazione W , una tale V esiste ed è unica a meno di isomorfismi. Per l'unicità, osserviamo che ogni elemento di V ha un'unica espressione $v = \sum g_\sigma w_\sigma$, con i $w_\sigma \in W$. Preso $g \in G$, scriviamo $gg_\sigma = g_\tau h$ per qualche $\tau \in G/H$ e $h \in H$. Allora dobbiamo avere

$$g(g_\sigma w_\sigma) = (gg_\sigma)(w_\sigma) = (g_\tau h)w_\sigma = g_\tau(hw_\sigma).$$

Questo prova l'unicità e ci dice come costruire V a partire da W . Si prende una copia W^σ di W per ogni classe laterale $\sigma \in G/H$; per $w \in W$, sia $g_\sigma w$ l'elemento corrispondente a w nella copia σ -esima. Poniamo

$$V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W^\sigma$$

dunque ogni elemento in V ha una unica espressione $v = \sum g_\sigma w_\sigma$. Preso $g \in G$ definiamo

$$g(g_\sigma w_\sigma) = g_\tau(hw_\sigma), \quad \text{se } gg_\sigma = g_\tau h.$$

Per vedere che effettivamente questa definisce una azione di G su V , bisogna verificare che $g'(g(g_\sigma w_\sigma)) = (g'g)(g_\sigma w_\sigma)$ per ogni $g' \in G$. Ora se $g'g_\tau = g_\rho h'$, si ha

$$g'(g(g_\sigma w_\sigma)) = g'(g_\tau(hw_\sigma)) = g_\rho(h'(hw_\sigma)) = g_\rho((h'h)w_\sigma) = (g'g)(g_\sigma w_\sigma).$$

Teorema 2.10 (Frobenius). *Sia W una rappresentazione di H , U una rappresentazione di G e supponiamo $V = \text{Ind}_H^G W$. Allora ogni omomorfismo di H -moduli $\varphi : W \rightarrow U$ si estende in modo unico ad un omomorfismo di G -moduli $\tilde{\varphi} : V \rightarrow U$, ovvero*

$$\text{Hom}_H(W, \text{Res } U) = \text{Hom}_G(\text{Ind } W, U).$$

In particolare, questa proprietà di universalità determina $\text{Ind } W$ a meno di isomorfismo canonici.

Dimostrazione. $\text{Ind}_H^G W = \bigoplus W^\sigma = \bigoplus g_\sigma W$. Sia φ mappa di H -moduli e definiamo $\tilde{\varphi} : \text{Ind}_H^G W \rightarrow U$, ponendo

$$\tilde{\varphi}(g_\sigma w) = g_\sigma \varphi(w).$$

Notiamo che $\tilde{\varphi}$ non dipende dal rappresentante scelto, infatti

$$g_\sigma h w \rightarrow h w \rightarrow h \varphi(w) \rightarrow g_\sigma h \varphi(w).$$

□

Corollario 2.11 (Reciprocità di Frobenius). *Se W è una rappresentazione di H e U una rappresentazione di G , allora*

$$\langle \chi_{\text{Ind } W}, \chi_U \rangle_G = \langle \chi_W, \chi_{\text{Res } U} \rangle_H.$$

Dimostrazione. Per la linearità è sufficiente provare l'uguaglianza quando W e U sono irriducibili. $\langle \chi_{\text{Ind } W}, \chi_U \rangle_G$ è il numero di volte in cui U appare in $\text{Ind } W$, che è la dimensione di $\text{Hom}_G(\text{Ind } W, U)$. Analogamente $\langle \chi_W, \chi_{\text{Res } U} \rangle_H = \dim(\text{Hom}_H(W, \text{Res } U))$ e per il teorema precedente si ha la tesi. □

Esempio 4. Come applicazione di questo corollario, si può facilmente vedere che

$$\text{Ind}_{S_3}^{S_4} \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}.$$

Proposizione 2.12. *Sia C una classe di coniugio di G tale che $C \cap H$ si spezza in classi di coniugio D_1, \dots, D_r di H , con $H \leq G$; allora vale*

$$\chi_{\text{Ind}_H^G W}(C) = \frac{|G|}{|H|} \sum_{i=1}^r \frac{|D_i|}{|C|} \chi_W(D_i).$$

Dimostrazione. $\text{Ind } W = \bigoplus g_\sigma W$. Sia $g \in C$, si ha contribuito alla traccia solo se $\tau = \sigma$ in $gg_\sigma = g_\tau h$, ossia se $g_\sigma^{-1} g g_\sigma \in H$. Allora

$$\chi_{\text{Ind } W}(g) = \sum_{\sigma: g\sigma=g} \chi_W(g_\sigma^{-1} g g_\sigma).$$

I $\theta \in G$ tali che $\theta^{-1} g \theta \in D_i$ sono $|\text{Stab}(g)||D_i|$ e quindi il numero di volte per cui si verifica $g_\sigma^{-1} g g_\sigma \in D_i$ è

$$\frac{|\text{Stab}(g)||D_i|}{|H|} = \frac{|G||D_i|}{|H||C|}$$

da cui si ottiene la tesi. □

Corollario 2.13. *Sia B la rappresentazione banale di $H \leq G$. Allora*

$$\chi_{\text{Ind}_H^G B}(C) = \frac{|G|}{|H|} \sum_{i=1}^r \frac{|D_i|}{|C|} = \frac{|G|}{|H|} \left| \frac{C \cap H}{C} \right|$$

Proposizione 2.14. *Siano H e K due sottogruppi di G tali che $H \subset K$. Allora $\text{Ind}_H^G W = \text{Ind}_K^G(\text{Ind}_H^K W)$.*

Dimostrazione. Siano h_1, \dots, h_s un insieme di rappresentanti di K modulo H e k_1, \dots, k_r un insieme di rappresentanti di G -modulo K . Allora

$$\text{Ind}_K^G(\text{Ind}_H^K W) = \bigoplus_{i=1}^r \bigoplus_{j=1}^s k_i h_j W.$$

Ci rimane da far vedere che $\{k_i h_j\}$ formano un insieme di rappresentanti di G -modulo H . D'altra parte sono in numero giusto e generano tutti classi laterali distinte. □

Proposizione 2.15. *Se U è un G -modulo e W un H -modulo, allora*

$$U \otimes \text{Ind } W \cong \text{Ind}(\text{Res } U \otimes W).$$

Dimostrazione. Consideriamo la mappa

$$\begin{aligned} \varphi : U \otimes \text{Ind } W &\rightarrow \text{Ind}(\text{Res } U \otimes W) \\ (u \otimes g_\sigma w) &\mapsto g_\sigma(g_\sigma^{-1} u \otimes w) \end{aligned}$$

Osserviamo che φ è una mappa di G -moduli, infatti preso $x \in G$ si ha $xg_\sigma = g_\tau h$ e

$$\begin{aligned}\varphi(xu \otimes xg_\sigma w) &= \varphi(xu \otimes g_\tau hw) = g_\tau(g_\tau^{-1}xu \otimes hw) = \\ &= g_\tau(hg_\sigma^{-1}u \otimes hw) = xg_\sigma(g_\sigma^{-1}u \otimes w) = x\varphi(u \otimes g_\sigma w)\end{aligned}$$

La mappa φ è surgettiva per definizione e in più

$$\dim(U \otimes \text{Ind } W) = \dim(\text{Ind}(\text{Res } U \otimes W)),$$

da cui segue la tesi. □

Come corollario, prendendo W la rappresentazione banale, segue che

$$U \otimes P \cong \text{Ind}(\text{Res } U).$$

Proposizione 2.16. *Sia $d \geq 3$ e U la rappresentazione standard di S_d . Allora $\text{Sym}^2(U)$ non è irriducibile.*

Dimostrazione. Se indichiamo con B la rappresentazione banale di S_d , si ha che

$$\mathbb{C}^d = B + U.$$

Allora $\text{Sym}^2(\mathbb{C}^d) = \text{Sym}^2(U) + U + B$ e basta dimostrare che $\text{Sym}^2(\mathbb{C}^d)$ contiene due copie della rappresentazione banale B .

$\text{Sym}^2(\mathbb{C}^d)$ si identifica con i polinomi omogenei di grado 2 nelle variabili v_1, \dots, v_d e le due rappresentazioni banali sono date dai polinomi $v_1^2 + \dots + v_d^2$ e $\sum_{i \neq j} v_i v_j$. □

Questo risultato si può generalizzare, dimostrando che per ogni k , $\text{Sym}^k(U)$ non è irriducibile.

2.6 Il gruppo diedrale

2.6.1 Il caso pari

Sia $n = 2h$ pari e consideriamo il gruppo diedrale $D_n = \langle r^n = 1 = s^2 : rs = sr^{-1} \rangle$. Osserviamo che per ogni $i \in \mathbb{Z}$, vale che $sr^i s = r^{-i}$. Dunque $\{r^i, r^{-i}\}$ formano una classe di coniugio per ogni $i = 1, \dots, h-1$. Si hanno perciò $h-1$ classi di coniugio di questo tipo, più la classe dell'1 e la classe di r^h . Gli altri elementi si dividono in due classi di coniugio

$$\begin{aligned}\{s, sr^2, sr^4, \dots\}, \\ \{sr, sr^3, sr^5, \dots\}.\end{aligned}$$

In definitiva si hanno $h+3$ classi di coniugio.

Vediamo adesso di determinare le rappresentazioni irriducibili di D_{2h} . Sicuramente si hanno quattro rappresentazioni unodimensionali definite da

$$\begin{array}{cccc} r \mapsto 1 & r \mapsto 1 & r \mapsto -1 & r \mapsto -1 \\ s \mapsto 1 & s \mapsto -1 & s \mapsto 1 & s \mapsto -1 \end{array}$$

Sia ora V un D_n -modulo; allora V è anche un C_n -modulo. In particolare prendiamo $v \in V$ tale che $rv = \omega^i v$ con ω radice primitiva n esima di 1. Allora

$$r(sv) = sr^{-1}(v) = s\omega^{-i}v = \omega^{-1}sv$$

e $\langle v, sv \rangle$ è una rappresentazione di D_n data da

$$r = \begin{pmatrix} \omega^i & 0 \\ 0 & \omega^{-i} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se $i \neq 0, h$, $\langle v, sv \rangle$ è irriducibile. Abbiamo dunque trovato 4 rappresentazioni irriducibili unodimensionali e $h - 1$ rappresentazioni irriducibili duedimensionali e abbiamo finito.

La tavola dei caratteri di D_n , quando $n = 2h$ è dunque

D_n	1	r^h	r^i	s	sr
U_1	1	1	1	1	1
U_2	1	1	1	-1	-1
U_3	1	$(-1)^h$	$(-1)^i$	1	-1
U_4	1	$(-1)^h$	$(-1)^i$	-1	1
V_j	2	$2(-1)^j$	$\omega^{ij} + \omega^{-ij}$	0	0

con $i, j = 1, \dots, h - 1$.

2.6.2 Il caso dispari

Sia ora $n = 2h + 1$. Allora per $i = 1, \dots, h$, $\{r^i, r^{-i}\}$ sono h classi di coniugio distinte. In più a differenza del caso pari, le riflessioni appartengono tutte alla stessa classe di coniugio $\{s, sr, sr^2, \dots\}$. Si hanno dunque $h + 2$ classi di coniugio.

Per $i = 1, \dots, h$

$$r = \begin{pmatrix} \omega^i & 0 \\ 0 & \omega^{-i} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

generano una rappresentazione irriducibile di dimensione 2.

Ne rimangono dunque due che sono le rappresentazioni di dimensione 1 date da

$$\begin{array}{cc} r \mapsto 1 & r \mapsto 1 \\ s \mapsto 1 & s \mapsto -1 \end{array}$$

La tavola dei caratteri di D_n quando $n = 2h + 1$ è dunque

D_n	1	r^i	s
U_1	1	1	1
U_2	1	1	-1
V_j	2	$\omega^{ij} + \omega^{-ij}$	0

con $i, j = 1, \dots, h$.

2.7 Tavole di S_5 e A_5

In S_5 , ci sono 10 trasposizioni, 20 tre-cilci, 30 quattro-cilci e 24 cinque-cilci; in più ci sono 15 elementi coniugati a $(12)(34)$ e 20 elementi coniugati a $(12)(345)$.

Come per S_3 e S_4 anche qui ci sono la rappresentazione banale e la segno e la standard (V) , che indichiamo rispettivamente con



Ancora una volta, tensorizzando la rappresentazione standard con la segno, otteniamo un'altra rappresentazione irriducibile V' che indichiamo con



Abbiamo dunque trovato quattro rappresentazioni irriducibili

S_5	1	(12)	(123)	(1234)	(12345)	(12)(34)	(12)(345)
banale	1	1	1	1	1	1	1
segno	1	-1	1	-1	1	1	-1
standard	4	2	1	0	-1	0	-1
V'	4	-2	1	0	-1	0	1

Ne dobbiamo trovare altre 3; consideriamo la rappresentazione $\wedge^2 V$. Il suo carattere è $(6, 0, 0, 0, 1, -2, 0)$ ed è dunque irriducibile.

Consideriamo ora $\text{Sym}^2(V)$. Il suo carattere è $(10, 4, 1, 0, 0, 2, 1)$ e dunque $\langle \chi_{\text{Sym}^2(V)}, \chi_{\text{Sym}^2(V)} \rangle = 3$. L'unica possibilità è che

$$\text{Sym}^2(V) = B + V + W$$

da cui si ricava un'altra rappresentazione W il cui carattere è dato da $(5, 1, -1, -1, 0, 1, 1)$ e tensorizzando con la segno otteniamo W' irriducibile che completa la tabella

S_5	1	(12)	(123)	(1234)	(12345)	(12)(34)	(12)(345)
banale	1	1	1	1	1	1	1
segno	1	-1	1	-1	1	1	-1
standard	4	2	1	0	-1	0	-1
V'	4	-2	1	0	-1	0	1
$\wedge^2(V)$	6	0	0	0	1	-2	0
W	5	1	-1	-1	0	1	1
W'	5	-1	-1	1	0	1	-1

Proposizione 2.17. *Sia C la classe di coniugio in S_n delle permutazioni che consistono di prodotto di cicli di lunghezza d_1, d_2, \dots . Allora C , in A_n si spezza in classi di coniugio distinte se e solo se i d_k sono tutti dispari e distinti. Nel caso in cui C non rimanga una classe di coniugio, si spezza in esattamente due classi di coniugio.*

Dimostrazione. Sia $[\sigma]$ una classe di coniugio di S_n , con σ pari; supponiamo che nella decomposizione di σ in cicli disgiunti, ci sia un ciclo di lunghezza pari τ . Vogliamo far vedere che ogni $g \in [\sigma]$ è coniugato a σ attraverso un elemento di A_n . Sappiamo che $g = \delta\sigma\delta^{-1}$ con $\delta \in S_n$. Se $\delta \in A_n$ abbiamo finito, altrimenti $\delta\tau$ è un elemento di A_n e $(\delta\tau)\sigma(\delta\tau)^{-1} = g$.

Supponiamo ora che nella decomposizione di σ ci siano due cicli di lunghezza dispari uguale e siano $\sigma_1 = (a_1 \cdots a_k)$ e $\sigma_2 = (b_1 \cdots b_k)$. Come prima prendiamo $g = \delta\sigma\delta^{-1}$ con $\delta \in S_n$. Se $\delta \notin A_n$, allora $\delta(a_1b_1) \cdots (a_kb_k) \in A_n$ risolve il problema.

Se invece i d_i sono tutti dispari e distinti, un facile conto mostra che C si deve spezzare in esattamente due classi distinte. \square

Per la proposizione precedente, A_5 ha 5 classi di coniugio che sono $[1], [(123)], [(12)(34)], [(12345)], [(21345)]$, rispettivamente composte di 1, 20, 15, 12, 12 elementi.

Le restrizioni da S_5 a A_5 delle rappresentazioni banale, standard e W , danno origine a tre rappresentazioni irriducibili che indichiamo con U, V, W .

Le altre due rappresentazioni, che indichiamo con Y e Z , sono tali che $(\dim Y)^2 + (\dim Z)^2 = 18$ da cui si ricava che sono due rappresentazioni di dimensione 3.

In più la restrizione di $\wedge^2(V)$ ha carattere $(6, 0, -2, 1, 1)$ e risulta dunque la somma di Y e Z . Con le relazioni di ortogonalità si conclude che la tavola dei caratteri di A_5 è data da

A_5	1	(123)	(12)(34)	(12345)	(21345)
U	1	1	1	1	1
V	4	1	0	-1	-1
W	5	-1	1	0	0
Y	3	0	-1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
Z	3	0	-1	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

A_5 può essere interpretato come il gruppo delle isometrie di un icosaedro e Y è la rappresentazione corrispondente. Le due rappresentazioni $A_5 \rightarrow GL_3(\mathbb{R})$ corrispondenti a Y e Z hanno la stessa immagine, ma differiscono per un automorfismo esterno di A_5 .

Notiamo anche che $\wedge^2(V)$ non si decompone su \mathbb{Q} , infatti è impossibile posizionare un icosaedro in modo che i suoi vertici abbiano tutti coordinate razionali, che segue dall'analogo fatto per un pentagono regolare nel piano.

Capitolo 3

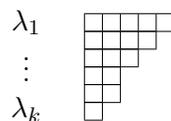
Rappresentazioni del gruppo simmetrico

Questo capitolo è dedicato allo studio delle rappresentazioni irriducibili del gruppo simmetrico.

3.1 Definizioni

Il numero di rappresentazioni irriducibili di S_d è uguale al numero delle sue classi di coniugio, che è uguale al numero di partizioni di d : $d = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$ con $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$.

Ad una partizione $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ è associato un *diagramma di Young* che indicheremo ancora con λ



con λ_i box nell' i -esima riga. Per ogni λ si definisce la *partizione coniugata* λ' ottenuta scambiando le righe con le colonne nel diagramma di Young associato a λ (ovvero effettuando una riflessione rispetto alla linea a 45 gradi). Per esempio se $d = 13$ e $\lambda = (4, 3, 3, 2, 1)$, si ha



e dunque $\lambda' = (5, 4, 3, 1)$.

Dato un diagramma di Young λ , si definisce un *tableau* T come una numerazione dei box di λ con gli interi $1, \dots, d$.

Ad ogni tableau T , si possono associare due sottogruppi di S_d

$$P_T = \{g \in S_d : g \text{ preserva ogni riga} \}$$

$$Q_T = \{g \in S_d : g \text{ preserva ogni colonna} \}$$

Nell'algebra di gruppo, introduciamo due elementi corrispondenti a questi sottogruppi, ponendo

$$a_T = \sum_{g \in P_T} e_g, \quad b_T = \sum_{g \in Q_T} \varepsilon(g)e_g.$$

Poniamo infine $c_T = a_T b_T \in \mathbb{C}S_d$ che prende il nome di *simmetrizzatore di Young*.

Osserviamo che se T e T' sono due tableaux relativi allo stesso diagramma e $\theta \in S_d$ tale che $\theta T = T'$, allora

$$P_{T'} = \theta P_T \theta^{-1}, \quad Q_{T'} = \theta Q_T \theta^{-1}$$

e dunque a meno di coniugio, il particolare riempimento non conta e scriveremo $P_\lambda, Q_\lambda, a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda$ al posto di P_T, Q_T, a_T, b_T, c_T .

Quello che vogliamo dimostrare è il seguente

Teorema 3.1. $c_\lambda^2 = n_\lambda c_\lambda$ e l'immagine di c_λ (per la moltiplicazione a destra su $\mathbb{C}S_d$) è una rappresentazione irriducibile V_λ di S_d . Ogni rappresentazione irriducibile di S_d può essere ottenuta in questo modo per un'unica partizione.

Prima di dimostrare questo teorema, facciamo delle osservazioni. Questo teorema da una corrispondenza diretta ed esplicita tra le classi di coniugio di S_d e le rappresentazioni irriducibili di S_d .

Non solo, ma la costruzione può essere fatta anche sostituendo \mathbb{C} con \mathbb{Q} e dunque le rappresentazioni irriducibili di S_d sono definite su \mathbb{Q} .

Facciamo ora qualche esempio. Quando $\lambda = (d)$, si ha che

$$V_{(d)} = \mathbb{C}S_d \sum_{g \in S_d} e_g = \mathbb{C} \sum_{g \in S_d} e_g$$

è la rappresentazione banale. Quando $\lambda = (1, \dots, 1)$,

$$V_{(1, \dots, 1)} = \mathbb{C}S_d \sum_{g \in S_d} \varepsilon(g)e_g = \mathbb{C} \sum_{g \in S_d} \varepsilon(g)e_g$$

è la rappresentazione segno.

Sia ora $d = 3$ e $\lambda = (2, 1)$, allora

$$c_{(2,1)} = (e_1 + e_{(12)})(e_1 - e_{(13)}) = e_1 + e_{(12)} - e_{(13)} - e_{(132)}$$

e $V_{(2,1)}$ è generato da $c_{(2,1)}$ e $(13)c_{(2,1)}$ ed è dunque la rappresentazione standard di S_3 .

3.2 Rappresentazioni irriducibili

Dimostriamo ora il teorema enunciato nel paragrafo precedente, attraverso tre lemmi.

Poniamo $G = \mathbb{C}S_d$. Osserviamo che per ogni partizione λ di d , $P_\lambda \cap Q_\lambda = \{1\}$, quindi un elemento di S_d può essere scritto in al più un modo come prodotto pq , con $p \in P_\lambda$ e $q \in Q_\lambda$.

Lemma 3.2. *Per ogni λ partizione di d , valgono le seguenti:*

1. Per $p \in P$, $pa_\lambda = a_\lambda p = a_\lambda$.
2. Per $q \in Q$, $(\varepsilon(q)q)b_\lambda = b_\lambda(\varepsilon(q)q) = b_\lambda$.
3. Per ogni $p \in P$ e $q \in Q$, $pc_\lambda(\varepsilon(q)q) = c_\lambda$ e a meno di moltiplicazione per uno scalare, c_λ è l'unico elemento in G con questa proprietà.

Dimostrazione. Le prime due affermazioni sono ovvie; soffermiamoci dunque sull'ultima. Se $\sum n_g e_g$ soddisfa la condizione in (3), allora $n_{pgq} = \varepsilon(q)n_g$ per ogni p, g, q ; in particolare $n_{pq} = \varepsilon(q)n_1$. Dunque è sufficiente provare che $n_g = 0$ per ogni $g \notin PQ$. Per tali g è sufficiente trovare una trasposizione t tale che $p = t \in P$ e $q = g^{-1}tg \in Q$. Ne seguirebbe infatti che $pgq = g$ e $n_g = -n_g$. Se $T' = gT$ è il tableau ottenuto rimpiazzando ogni entrata i di T con $g(i)$, si tratta di dimostrare che esistono due interi che stanno nella stessa riga di T e nella stessa colonna di T' ; t è la trasposizione di questi due elementi. Siano $p_1 \in P$ e $q'_1 \in Q' = gQg^{-1}$ tali che p'_1T e q'_1T' abbiano la stessa prima riga. Ripetendo questo ragionamento, si trovano $p \in P$ e $q' \in Q'$ tali che $pT = q'T'$. Allora $pT = q'gT$ e dunque $p = q'g$ e infine $g = pq$ dove $q = g^{-1}(q')^{-1}g \in Q$, da cui l'assurdo. \square

Le partizioni relative ad un intero fissato, possono essere ordinate in modo lessicografico ponendo $\lambda > \mu$ se il primo intero non zero di $\lambda_i - \mu_i$ è positivo.

Lemma 3.3. *Per ogni λ e μ partizioni di d , valgono le seguenti:*

1. Se $\lambda > \mu$, allora per ogni $x \in G$, $a_\lambda x b_\mu = 0$. In particolare $c_\lambda c_\mu = 0$
2. Per ogni $x \in G$, $c_\lambda x c_\lambda$ è un multiplo scalare di c_λ . In particolare $c_\lambda c_\lambda = n_\lambda c_\lambda$ per qualche $n_\lambda \in \mathbb{C}$.

Dimostrazione. Prendiamo $x = g \in S_d$. Poiché $gb_\mu g^{-1}$ è l'elemento costruito da gT' , dove T' è il tableau usato per costruire b_μ , è sufficiente mostrare che $a_\lambda b_\mu = 0$. $\lambda > \mu$ implica che ci sono due interi nella stessa riga di T e nella stessa colonna in T' . Se t è la trasposizione di questi due interi, allora $a_\lambda t = a_\lambda$, $tb_\mu = -b_\mu$ e dunque $a_\lambda b_\mu = a_\lambda t b_\mu = -a_\lambda b_\mu$ e la (1) è dimostrata. La (2) segue dal punto 3 del lemma precedente. \square

Lemma 3.4. *Per ogni λ e μ partizioni di d , valgono le seguenti:*

1. Ogni V_λ è una rappresentazione irriducibile di S_d .

2. Se $\lambda \neq \mu$, allora V_λ e V_μ sono non isomorfi.

Dimostrazione. Per (1) notiamo che $c_\lambda V_\lambda \subset \mathbb{C}c_\lambda$ per il lemma precedente. Se $W \subset V_\lambda$ è una sottorappresentazione, allora $c_\lambda W$ è tutto $\mathbb{C}c_\lambda$ oppure è 0. Se è tutto $\mathbb{C}c_\lambda$, allora $V_\lambda = Gc_\lambda \subset W$. Altrimenti $WW \subset Gc_\lambda W = 0$, ma questo implica $W = 0$. Infatti una proiezione di G in W è data dalla moltiplicazione a destra per un elemento $w \in G$ tale che $w = w^2 \in WW = 0$. Infatti sia $\mathbb{C}G = W \oplus U$ e $e = w + u$ con $w \neq 0$ (altrimenti $\mathbb{C}G \subset U$); allora $w \cdot e = w(w + u) = w^2 + wu$, ma $wu \in U \cap W = 0$ da cui la tesi. Questo prova anche che n_λ nel lemma precedente è diverso da 0.

Per la (2) possiamo assumere che $\lambda > \mu$. Allora $c_\lambda V_\lambda = \mathbb{C}c_\lambda \neq 0$, ma $c_\lambda V_\mu = c_\lambda Gc_\mu = 0$ e quindi non possono essere G -moduli isomorfi. \square

Lemma 3.5. Per ogni λ partizione di d , $c_\lambda c_\lambda = n_\lambda c_\lambda$ con $n_\lambda = d! / \dim V_\lambda$.

Dimostrazione. Sia F la moltiplicazione a destra per c_λ su G . Poiché F è la moltiplicazione per n_λ su V_λ e zero sul $\ker(c_\lambda)$, la traccia di F è n_λ volte la dimensione di V_λ . Ma il coefficiente di e_g in $e_g c_\lambda$ è 1 e dunque la traccia di F è $|S_d| = d!$. \square

Ci si può chiedere se $n_\lambda \in \mathbb{Z}$. La risposta è affermativa e vale un risultato più generale.

Teorema 3.6. Sia χ una rappresentazione irriducibile di un gruppo finito G . Allora $\chi(1) \mid |G|$.

Dimostrazione. Prendiamo una classe di coniugio C di G e la seguente mappa di G -rappresentazioni:

$$\begin{aligned} \phi : V &\rightarrow V \\ v &\mapsto \sum_{g \in C} g \cdot v \end{aligned}$$

per ogni V -rappresentazione irriducibile di G . Osserviamo che ϕ è effettivamente una mappa di G -rappresentazioni infatti

$$\sum_{g \in C} g \cdot v = \sum_{g \in G} \alpha(g) g \cdot v$$

dove $\alpha(g) = 1$ se $g \in C$, mentre $\alpha(g) = 0$ se $g \notin C$; quindi α è una funzione di classe e di conseguenza ϕ è una mappa di G -rappresentazioni.

Come prima calcoliamo la traccia in due modi. Osserviamo che per il Lemma di Schur, $\phi = \lambda \cdot id$ da cui si ricava

$$\text{Tr}(\phi) = \lambda \cdot \dim(V)$$

D'altra parte per la definizione di ϕ , si ha

$$\mathrm{Tr}(\phi) = \sum_{g \in C} \mathrm{Tr}(g) = |C| \mathrm{Tr}(g) = |C| \chi_V(g) \text{ per } g \in C$$

da cui si ricava

$$\lambda \cdot \dim(V) = |C| \chi_V(g).$$

Proviamo ora che λ è un intero algebrico. Innanzitutto osserviamo che $\sum_{g \in C} g \in Z(\mathbb{Z}G)$ e che il centro dell'algebra $\mathbb{Z}G$ è generato come \mathbb{Z} -modulo da $\sum_{g \in E} g$, al variare di E fra le classi di coniugio di G : infatti un generico elemento $\sum n_g g$ sta nel centro se e solo se $n_g = n_{h^{-1}gh}$ per ogni $h \in G$. Quindi

$$\mathbb{Z}\left[\left(\sum_{g \in C} g\right)\right] \subseteq Z(\mathbb{Z}G).$$

Ricordiamo adesso un risultato classico di algebra commutativa. Siano $A \subset B$ due anelli e sia $\alpha \in B$; allora sono equivalenti:

1. α è intero su A .
2. Esiste C un A -modulo finitamente generato tale che $A[\alpha] \subset C \subset B$.

Allora $\sum_{g \in C} g$ è intero su \mathbb{Z} e risolverà un polinomio del tipo

$$x^k + \dots + a_1 x + a_0.$$

Applichiamo il nostro operatore

$$\left[\left(\sum_{g \in C} g\right)^k + \dots + a_1 \left(\sum_{g \in C} g\right) + a_0\right](v) = 0;$$

quindi

$$(\lambda^k + \dots + a_1 \lambda + a_0)v = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^k + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0,$$

cioè λ è algebrico su \mathbb{Z} .

Sfruttando $\lambda \cdot \dim(V) = |C| \chi_V(g)$ e il fatto che $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$, si ottiene

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_V(g)} \chi_V(g) = \frac{1}{|G|} \sum_C |C| \overline{\chi_V(g)} \chi_V(g) = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_C |C| \frac{\dim(V) \lambda_C}{|C|} \overline{\chi_V(g)} \end{aligned}$$

e otteniamo

$$\sum_C \lambda_C \overline{\chi_V(g)} = \frac{|G|}{\dim(V)}.$$

Poiché $\chi_V(g)$ è un intero algebrico, anche $|G|/\dim(V)$ è un intero algebrico su \mathbb{Z} e dato che $\in \mathbb{Q}$, segue che è un intero. □

Come applicazione, osserviamo che se G è un gruppo di ordine dispari e V una G -rappresentazione di dimensione pari, allora V necessariamente non sarà una rappresentazione irriducibile di G .

3.3 Due esercizi

Ricordiamo che la rappresentazione standard di S_n è definita dal sottospazio

$$\{(x_1, \dots, x_n) : \sum x_i = 0\}.$$

Dimostriamo che effettivamente si tratta di una rappresentazione irriducibile e che corrisponde alla partizione $(n-1, 1)$.

Bisogna studiare il simmetrizzatore di Young e provare che

$$\mathbb{C}S_n c_{(n-1,1)} = V_{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array}} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline & \square & & \\ \hline \end{array}.$$

Prendiamo il seguente riempimento $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \cdot & \cdot \\ \hline n & & & \\ \hline \end{array}$, allora

$$a_{(n-1,1)} = \sum_{h:h(n)=n} h \quad \text{e} \quad b_{(n-1,1)} = e - (1n),$$

da cui

$$c_{(n-1,1)} = a_{(n-1,1)} b_{(n-1,1)} = \sum_{h:h(n)=n} h - \sum_{h':h'(1)=n} h'.$$

Sia $g \in S_n$ tale che $g(n) = j$; allora

$$g c_{(n-1,1)} = \sum_{h:h(n)=j} h - \sum_{h':h'(1)=j} h' = v_j,$$

e dunque $\mathbb{C}S_n c_{(n-1,1)} = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle_{\mathbb{C}}$. Quindi la dimensione di questa rappresentazione è $\leq n$, ma i v_j non sono linearmente indipendenti infatti vale che $\sum_i v_i = 0$; l'elemento $\theta \in S_n$ tale che $\theta(1) = j$, $\theta(n) = k$ in v_j ha segno $-$ e in v_k ha segno $+$, dunque la dimensione della rappresentazione è $\leq n-1$. Ora si osserva che v_2, \dots, v_n sono linearmente indipendenti. Se per assurdo

$$v_2 = a_3 v_3 + \dots + a_n v_n$$

prendiamo un $h \in S_n$ tale che

$$h(1) = 1 \quad \text{e} \quad h(n) = 2;$$

tale h compare solo in v_1 e v_2 e dunque non sta in $a_3 v_3 + \dots + a_n v_n$. Ne segue che la dimensione della rappresentazione è proprio $n-1$.

Confrontiamo:

- $\mathbb{C}S_n c_{(n-1,1)} = V_{\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square \end{smallmatrix}}$ con base $\{v_2 - v_1, v_3 - v_2, \dots, v_n - v_{n-1}\}$.

Vogliamo vedere come agisce $g \in S_n$ su un elemento della base $v_j - v_{j-1}$.
Se g è tale che $g(j) = i$ e $g(j-1) = k$, allora

$$g(v_j - v_{j-1}) = v_i - v_k.$$

- Vecchia standard $\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square \end{smallmatrix} = \{\sum_i x_i = 0\}$; se chiamiamo $\{e_i\}$ la base standard di \mathbb{R}^n la base di $\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square \end{smallmatrix}$ è $\{e_2 - e_1, \dots, e_n - e_{n-1}\}$.

Lo stesso g di prima in questo caso agisce in questo modo

$$g(e_j - e_{j-1}) = e_i - e_k.$$

Le due rappresentazioni sono isomorfe in quanto le matrici che le rappresentano in queste due basi sono proprio le stesse. \square

Proviamo ora che

$$V_\lambda \otimes \begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix} \cong V_{\lambda'}$$

con λ' la coniugata di λ .

Cominciamo col dimostrare che $V_\lambda = \mathbb{C}S_d b_\lambda a_\lambda$. Consideriamo l'applicazione

$$\widehat{\cdot}: \mathbb{C}S_d \rightarrow \mathbb{C}S_d,$$

definita ponendo per ogni $g \in S_d$ $\widehat{g} = g^{-1}$ ed estendendo per linearità. Osserviamo che per ogni $x, y \in \mathbb{C}S_d$ vale $\widehat{\widehat{xy}} = \widehat{y\widehat{x}}$ e che $\widehat{a_\lambda} = a_\lambda$ e $\widehat{b_\lambda} = b_\lambda$. Applichiamo ora la funzione $\widehat{\cdot}$ a entrambi i membri della relazione

$$a_\lambda b_\lambda a_\lambda b_\lambda = n_\lambda a_\lambda b_\lambda$$

e otteniamo

$$b_\lambda a_\lambda b_\lambda a_\lambda = n_\lambda b_\lambda a_\lambda.$$

Siao ora $\Gamma_\lambda = \mathbb{C}S_d b_\lambda a_\lambda$ e consideriamo le due applicazioni $\cdot b_\lambda$ e $\cdot a_\lambda$, rispettivamente moltiplicazione per a_λ e moltiplicazione per b_λ . Abbiamo allora la seguente situazione

$$\begin{array}{ccccc} & & \varphi & & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\ V_\lambda & \xrightarrow{\cdot a_\lambda} & \Gamma_\lambda & \xrightarrow{\cdot b_\lambda} & V_\lambda \\ & & & & \\ & \curvearrowright & \phi & \curvearrowleft & \\ \Gamma_\lambda & \xrightarrow{\cdot b_\lambda} & V_\lambda & \xrightarrow{\cdot a_\lambda} & \Gamma_\lambda \end{array}$$

Per quanto visto φ e ϕ sono entrambe $n_\lambda I$ e dunque sono due isomorfismi. Ne segue che anche $\cdot a_\lambda$ e $\cdot b_\lambda$ sono due isomorfismi e dunque

$$V_\lambda \cong \Gamma_\lambda = \mathbb{C}S_d b_\lambda a_\lambda = \mathbb{C}S_d \sum_{qp} \varepsilon(q) qp,$$

dove $q \in Q_\lambda$ e $p \in P_\lambda$.

Per quanto riguarda $V_{\lambda'}$ invece si ha

$$V_{\lambda'} = \mathbb{C}S_d \sum_{qp} \varepsilon(p) qp.$$

Definiamo un'applicazione $\rho : \mathbb{C}S_d \rightarrow \mathbb{C}S_d$ ponendo

$$\rho \left(\sum a_g g \right) = \sum a_g \varepsilon(g) g.$$

ρ è un isomorfismo ed è tale che $\rho(V_\lambda) = V_{\lambda'}$.

Prendiamo in esame la seguente situazione

$$V_\lambda \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\delta} V_\lambda \xrightarrow{\rho} V_{\lambda'}$$

dove δ è definita ponendo $\delta(v \otimes tc_{(1,\dots,1)}) = tv$ per ogni $v \in V_\lambda$ e $t \in \mathbb{C}$. Allora $\psi = \rho \circ \delta$ è un isomorfismo di spazi vettoriali. Rimane da dimostrare che è una mappa di S_d -moduli.

Sia dunque $x = \sum a_h h$ un elemento di V_λ e $g \in S_d$; allora

$$\begin{aligned} \psi(g(x \otimes tc_{(1,\dots,1)})) &= \psi(gx \otimes tgc_{(1,\dots,1)}) = \psi(gx \otimes t\varepsilon(g)c_{(1,\dots,1)}) = \\ &= \varepsilon(g)t\rho(gx) = \varepsilon(g)t \sum a_h \varepsilon(gh)gh = \\ &= t \sum a_h \varepsilon(h)gh = g\psi(x \otimes tc_{(1,\dots,1)}) \end{aligned}$$

□

Corollario 3.7. *Sia λ una partizione e λ' la sua coniugata, allora*

$$\dim(V_\lambda) = \dim(V_{\lambda'})$$

ma V_λ e $V_{\lambda'}$ non sono isomorfe.

Capitolo 4

Anello delle funzioni simmetriche

Consideriamo l'anello $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$; su di esso vi è una azione del gruppo simmetrico S_n indotta dall'azione di S_n sulle variabili x_1, \dots, x_n .

Definizione 4.1. Un polinomio $p \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ si dice simmetrico se per ogni $\sigma \in S_n$ vale $\sigma p = p$.

Osserviamo che i polinomi simmetrici formano un sottoanello di $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ che denotiamo con Λ_n ; questo anello è graduato, ovvero

$$\Lambda_n = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda_n^k,$$

dove Λ_n^k sono i polinomi simmetrici di grado k con lo 0 (perché vogliamo che ciascuno di essi formi uno \mathbb{Z} -modulo).

Esempio 5. $p(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3 + x_2^2 x_1 + \dots$. Osserviamo che poiché p deve essere invariante rispetto all'azione di S_3 , se contiene un termine del tipo $x_1^2 x_2$, deve contenere anche tutti i termini del tipo $x_{\sigma(1)}^2 x_{\sigma(2)}$ al variare di $\sigma \in S_3$.

Se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, poniamo $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$.

Sia λ una partizione di un numero naturale, definiamo la lunghezza $\ell(\lambda)$ come il numero di termini non zero e la norma $|\lambda| = \sum \lambda_i$.

Definizione 4.2. Sia $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0)$ una partizione di n . Definiamo

$$m_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha} x^\alpha,$$

dove α varia fra le permutazioni effettive di $(\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0)$.

Per esempio, $m_{(1,1,0)}(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$, infatti ci sono solo tre permutazioni effettive di $(1, 1, 0)$ (bisogna scegliere dove mettere lo 0).

$m_{(2,0)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$, perchè $(2, 0)$ lo possiamo vedere come $(2, 0, 0, 0)$ e ci sono 4 permutazioni effettive (si sceglie dove mettere il 2).

Proposizione 4.1. *Gli m_λ al variare di λ fra tutte le partizioni di lunghezza minore o uguale a n , formano una \mathbb{Z} -base di Λ_n . In particolare gli m_λ con $\ell(\lambda) \leq n$ e $|\lambda| = k$ formano una \mathbb{Z} -base di Λ_n^k .*

Conviene trattare gli anelli dei polinomi simmetrici tutti insieme, ossia passare a considerare infinite variabili. Se $m \geq n$, l'applicazione $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m] \rightarrow \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ tale che $x_i \mapsto x_i$ per $i = 1, \dots, n$ e $x_i \mapsto 0$ per $i = n+1, \dots, m$ è un omomorfismo di anelli. Questo si restringe a $\rho_{m,n} : \Lambda_m \rightarrow \Lambda_n$ tale che

$$m_\lambda \mapsto \begin{cases} 0 & \ell(\lambda) > n \\ m_\lambda & \ell(\lambda) \leq n \end{cases}.$$

Per esempio $m_{(1,1,0,0)} \mapsto m_{(1,1,0)}$. Osserviamo che $\rho_{m,n}$ è surgettiva e mantiene il grado dei polinomi. Dunque possiamo considerare l'ulteriore restrizione $\rho_{m,n}^k : \Lambda_m^k \rightarrow \Lambda_n^k$; se poniamo inoltre la condizione $m \geq n \geq k$, nessun vettore della base viene mandato in 0.

Con queste ipotesi $\rho_{m,n}^k$ manda base in base e dunque è bigiettivo. Facciamo il limite inverso degli \mathbb{Z} -moduli Λ_n^k

$$\Lambda^k = \varprojlim \Lambda_n^k,$$

dove il limite con $n \rightarrow \infty$ viene fatto sul numero di variabili. Un elemento di Λ^k è una successione di polinomi (f_n) tale che per ogni n , $f_n \in \Lambda_n^k$ e $\rho_{m,n}(f_m) = f_n$. Moralmente, per la bigiattività mostrata sopra, se $m \geq n \geq k$ il limite si stabilizza. Vogliamo fissare una base.

Λ^k ha una base costituita dalle funzioni simmetriche monomiali m_λ (λ partizione di k), definite da $\rho_n^k : \Lambda^k \rightarrow \Lambda_n^k$. Più precisamente, $\rho_n^k(m_\lambda) = m_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ ci permette di individuare l' n -esimo elemento della successione che definisce m_λ .

Definizione 4.3. L'anello delle funzioni simmetriche nelle infinite variabili x_1, \dots, x_n, \dots è

$$\Lambda = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^k.$$

Osserviamo che effettivamente Λ è un anello in quanto se $(f_n) \in \Lambda^k$ e $(g_n) \in \Lambda^j$, la moltiplicazione appartiene a Λ^{k+j} .

Osserviamo che Λ non è il limite inverso dei Λ_n nella categoria degli anelli; infatti $\prod_{i=1}^{\infty} (1 + x_i) \in \varprojlim \Lambda_n$, ma non sta nell'anello Λ poiché gli elementi di Λ sono per definizione somme finite di funzioni simmetriche monomiali m_λ . Λ è invece il limite inverso dei Λ_n nella categoria degli anelli graduati.

4.1 Funzioni simmetriche elementari

Definizione 4.4. Per ogni $r \geq 0$ la r -esima funzione elementare simmetrica e_r è data da

$$e_0 = 1, \quad e_r = \sum_{i_1 < \dots < i_r} x_{i_1} \cdots x_{i_r}.$$

Osserviamo che $e_r = m_\lambda$ con $\lambda = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$. Se indichiamo con $E(t) = \sum e_r t^r \in \Lambda[[t]]$ la funzione generatrice degli e_r , vale che

$$E(t) = \prod_{i \geq 1} (1 + x_i t).$$

Per ogni partizione $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ poniamo $e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \cdots e_{\lambda_k}$.

Teorema 4.2. *Gli e_λ costituiscono una base dell'anello delle funzioni simmetriche Λ .*

Definizione 4.5. Siano λ e μ due partizioni dello stesso intero. Scriveremo che $\lambda \succeq \mu$ se per ogni i si ha $\lambda_1 + \cdots + \lambda_i \geq \mu_1 + \cdots + \mu_i$.

Osserviamo che \succeq non è un ordine lineare sull'insieme delle partizioni; infatti $(3, 1, 1, 1)$ e $(2, 2, 2)$ non sono confrontabili.

Teorema 4.3. *Sia λ una partizione e λ' la sua coniugata. Allora*

$$e_{\lambda'} = m_\lambda + \sum_{\mu \prec \lambda} a_{\lambda\mu} m_\mu,$$

dove $a_{\lambda\mu} \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. $e_{\lambda'} = e_{\lambda'_1} e_{\lambda'_2} \cdots$ è somma di monomi ognuno dei quali è della forma

$$x^\alpha = (x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{\lambda'_1}}) (x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_{\lambda'_2}}) \cdots$$

con $i_1 < i_2 < \cdots < i_{\lambda'_1}$, $j_1 < j_2 < \cdots < j_{\lambda'_2}$ e così via.

Consideriamo il diagramma relativo alla partizione λ e riempiamo la prima colonna con $i_1, \dots, i_{\lambda'_1}$, la seconda colonna con $j_1, \dots, j_{\lambda'_2}$ e così via. È chiaro che per ogni $r \geq 1$ gli indici minori o uguali a r sono nelle prime r righe; dunque $\alpha_1 + \cdots + \alpha_r \leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_r$ e quindi $\alpha \preceq \lambda$ (se avessi definito \preceq anche per oggetti tipo α). Ne segue che

$$e_{\lambda'} = \sum_{\mu \preceq \lambda} a_{\lambda\mu} m_\mu$$

m_λ può comparire solo se nella prima riga ho sempre scritto 1, nella seconda ho sempre scritto 2 e così via e quindi c'è un modo solo da cui $a_{\lambda\lambda} = 1$. \square

Corollario 4.4. *Vale $\Lambda = \mathbb{Z}[e_1, e_2, \dots]$ e le e_r sono algebricamente indipendenti su \mathbb{Z} .*

Dimostrazione. Gli m_λ formano una \mathbb{Z} -base di Λ e dunque per la proposizione precedente, anche gli e_λ formano una \mathbb{Z} -base.

In altre parole ogni elemento di Λ può essere espresso in modo unico come un polinomio negli e_r . \square

Nel caso di una quantità finita di variabili x_1, \dots, x_n , il corollario precedente ci dice che $\Lambda_n = \mathbb{Z}[e_1, \dots, e_n]$ e che gli e_1, \dots, e_n sono algebricamente indipendenti. Così è solitamente enunciato il 'teorema fondamentale delle funzioni simmetriche'.

4.1.1 Kronecker

Sia P un polinomio monico in $\mathbb{Z}[x]$, le cui radici complesse hanno tutte modulo minore o uguale a 1 e tali che $P(0) \neq 0$. Dimostriamo che le radici di P sono radici dell'unità. Scriviamo

$$P = x^n - e_1(\underline{z})x^{n-1} + \cdots + (-1)^n e_n(\underline{z}) = (x - z_1) \cdots (x - z_n),$$

dove $e_r(\underline{z}) = e_r(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{Z}$.

Chiamiamo Ω_n l'insieme dei polinomi di questo tipo di grado n . Si ha

$$|e_p(\underline{z})| = \left| \sum_{|I|=p} \prod_{i \in I} z_i \right| \leq \binom{n}{p}$$

da cui si deduce che Ω_n è finito.

Costruiamo $Q = \prod_{i=1}^n (x - z_i^k)$. Le radici di Q hanno tutte norma ≤ 1 e $Q(0) \neq 0$; dimostriamo che $Q \in \mathbb{Z}[x]$. Sappiamo che

$$Q = x^n - e_1(\underline{z}^k)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n e_n(\underline{z}^k),$$

dove $e_r(\underline{z}^k) = e_r(z_1^k, \dots, z_n^k)$ è simmetrico in z_1, \dots, z_n a coefficienti interi; dunque per il teorema $e_p(\underline{z}^k) = g(e_1(\underline{z}), \dots, e_n(\underline{z}))$ con $g \in \mathbb{Z}[x]$. Si conclude che $e_p(\underline{z}^k) \in \mathbb{Z}$ e che $Q \in \mathbb{Z}[x]$. In particolare $Q \in \Omega_n$ e poiché quest'ultimo è finito, l'applicazione $k \rightarrow z_i^k$ non può essere iniettiva ed esistono due interi j_1, j_2 per cui $z_i^{j_1} = z_i^{j_2}$ e $z_i^{j_2 - j_1} = 1$.

4.1.2 Funzioni polinomiali su $M_{n \times n}(\mathbb{C})$

Osserviamo che $GL(n, \mathbb{C})$ agisce su $M_{n \times n}(\mathbb{C})$ per coniugio; cerchiamo di capire quali sono le funzioni polinomiali $f : M_{n \times n}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ invarianti per coniugio. Sia dunque f una tale funzione e restringiamo f a \mathcal{D} l'insieme delle matrici diagonali; f rimane invariante per coniugio. In particolare $S_n \curvearrowright GL(n, \mathbb{C})$ agisce su una matrice $D \in \mathcal{D}$, permutando gli elementi d_i sulla diagonale e $f(D)$ è un polinomio simmetrico nei d_i . Esiste dunque un polinomio g tale che

$$g(e_1(\underline{d}), \dots, e_n(\underline{d})) = f|_D(d_1, \dots, d_n).$$

Osserviamo che g ha senso su tutto $M_{n \times n}(\mathbb{C})$ ponendo

$$g(A) = g(e_1(A), \dots, e_n(A)),$$

dove $e_i(A) = e_i(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ e γ_j radici del polinomio caratteristico. La funzione g è polinomiale da $M_{n \times n}(\mathbb{C})$ in \mathbb{C} ed è invariante per coniugio; in più g e f coincidono sulle matrici diagonali.

L'invarianza per coniugio, implica che f e g coincidono sulle matrici diagonalizzabili.

Dimostriamo ora che le matrici diagonalizzabili sono dense in $M_{n \times n}(\mathbb{C})$. Basta far vedere che sono dense le matrici con autovalori distinti.

Sia $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ un polinomio a coefficienti in \mathbb{C} e chiamiamo $b_i = i a_i$ per $i = 1, \dots, n$ i coefficienti del polinomio derivato; $p(x)$ ha radici multiple se e solo se $\text{disc}(p(x)) = 0$ dove $\text{disc}(p(x))$ è il determinante della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \ddots & 0 & b_{n-1} & b_n & \ddots & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_n & 0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & a_{n-1} & \vdots & \ddots & b_1 & \vdots & \\ \vdots & \ddots & a_0 & \vdots & & & & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_1 \end{pmatrix}$$

Infatti, indichiamo con P_h lo spazio $h + 1$ -dimensionale dei polinomi con grado minore o uguale a h e consideriamo l'applicazione

$$T_{f,f'} : P_{n-2} \oplus P_{n-1} \rightarrow P_{2n-2}$$

definita da $T_{f,f'}(a, b) = fa + f'b$.

La matrice sopra, non è altro che la matrice associata a $T_{f,f'}$ nelle basi $(1, 0), (t, 0), \dots, (t^{n-2}, 0), (0, 1), (0, t), \dots, (0, t^{n-1})$ e $1, t, \dots, t^{2n-2}$.

Per l'algoritmo di Euclide, posto h il massimo comun divisore fra f e f' , l'immagine di $T_{f,f'}$ consiste di tutti i polinomi di grado $\leq 2n - 2$ e multipli di h , mentre il nucleo è costituito dalle coppie $(sg', -sr')$ dove $f = hr'$ e $f' = hg'$ da cui segue la tesi.

Allora se $\rho : M(n \times n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}[t]$ è l'applicazione che associa ad una matrice il suo polinomio caratteristico e $\varphi : \mathbb{C}[t] \rightarrow \mathbb{C}$ quella che associa ad un polinomio il suo discriminante, si ha che $\varphi \circ \rho$ è un'applicazione continua da $M(n \times n, \mathbb{C})$ a \mathbb{C} .

L'insieme delle matrici con autovalori distinti, sono dunque la retroimmagine attraverso un polinomio non nullo di $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e quindi è denso in $M(n \times n, \mathbb{C})$.

4.2 Funzioni simmetriche complete

Definizione 4.6. Per ogni $r \geq 0$ la funzione simmetrica completa h_r è la somma di tutti i monomi di grado totale r nelle variabili x_1, x_2, \dots , ovvero

$$h_r = \sum_{|\lambda|=r} m_\lambda.$$

Osserviamo che $h_0 = 1$ e $h_1 = e_1$. La funzione generatrice degli h_r è

$$H(t) = \sum_{r \geq 0} h_r t^r = \prod_{i \geq 1} (1 - x_i t)^{-1}.$$

Per vedere questo, osserviamo che

$$(1 - x_i t)^{-1} = \sum_{k \geq 0} (x_i t)^k.$$

Teorema 4.5. *In $\Lambda[[t]]$ vale*

$$H(t)E(-t) = 1.$$

Come corollario segue che per ogni $n \geq 1$ vale

$$\sum_{r=0}^n (-1)^r e_r h_{n-r} = 0.$$

Visto che gli e_r sono indipendenti, è possibile definire un omomorfismo di anelli graduati

$$\begin{aligned} \omega : \Lambda &\rightarrow \Lambda \\ e_r &\mapsto h_r \end{aligned}$$

Proposizione 4.6. $\omega^2 = id$ e dunque ω è un isomorfismo.

Dimostrazione. La dimostrazione segue dalla relazione che lega gli e_i e gli h_j vista sopra. \square

Ne segue immediatamente che

Teorema 4.7. $\Lambda = \mathbb{Z}[h_1, h_2, \dots]$ e gli h_i sono algebricamente indipendenti.

Se le variabili sono in numero finito, diciamo n , la mappa $\omega : \Lambda_n \rightarrow \Lambda_n$ è ancora un isomorfismo e $\Lambda_n = \mathbb{Z}[h_1, \dots, h_n]$. In particolare h_{n+1} si può scrivere come polinomio in h_1, \dots, h_n ; per esempio se $n = 2$, allora

$$h_1 = x_1 + x_2, \quad h_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2, \quad h_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2,$$

$$\text{e } h_3 = -h_1^3 + 2h_1 h_2.$$

4.3 Somme di potenze

Definizione 4.7. Per ogni $r \geq 0$ definiamo la r -esima somma di potenze

$$p_r = \sum x_i^r = m_{(r)}.$$

La funzione generatrice dei p_r è

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{r \geq 1} p_r t^{r-1} = \sum_{i \geq 1} \sum_{r \geq 1} x_i^r t^{r-1} = \\ &= \sum_{i \geq 1} \frac{x_i}{1 - x_i t} = \sum_{i \geq 1} \frac{d}{dt} \log \frac{1}{1 - x_i t}. \end{aligned}$$

Dunque

$$P(t) = \frac{d}{dt} \log \prod_{i \geq 1} (1 - x_i t)^{-1} = \frac{d}{dt} \log H(t) = H'(t)/H(t).$$

Analogamente, si vede che vale

$$P(-t) = E'(t)/E(t).$$

Mettendo assieme le due precedenti espressioni, si ottengono le formule

$$\begin{aligned} n h_n &= \sum_{r=1}^n p_r h_{n-r}, \\ n e_n &= \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} p_r e_{n-r}. \end{aligned}$$

Queste equazioni sono dovute a Newton e prendono infatti il nome di formule di Newton. Dalla prima di queste due formule, è chiaro che $h_n \in \mathbb{Q}[p_1, \dots, p_n]$ e che $p_n \in \mathbb{Z}[h_1, \dots, h_n]$ da cui si ricava che

$$\mathbb{Q}[p_1, \dots, p_n] = \mathbb{Q}[h_1, \dots, h_n].$$

Poiché gli h_r sono algebricamente indipendenti su \mathbb{Z} , e dunque anche su \mathbb{Q} , segue che

Teorema 4.8.

$$\Lambda_{\mathbb{Q}} = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}[p_1, p_2, \dots]$$

e i p_r sono algebricamente indipendenti su \mathbb{Q} .

Dunque se definiamo

$$p_{\lambda} = p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \dots$$

per ogni partizione $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$, allora i p_{λ} formano una \mathbb{Q} -base di $\Lambda_{\mathbb{Q}}$. Osserviamo però che essi non formano una \mathbb{Z} -base di Λ in quanto per esempio $h_2 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2)$.

Poiché l'involuzione ω scambia tra loro $H(t)$ e $E(t)$, segue che

$$\omega(p_n) = (-1)^{n-1} p_n,$$

per ogni $n \geq 1$ e dunque per ogni partizione λ , vale

$$\omega(p_\lambda) = \varepsilon_\lambda p_\lambda,$$

dove $\varepsilon_\lambda = (-1)^{|\lambda| - \ell(\lambda)}$. Per ogni partizione λ definiamo

$$z_\lambda = \prod_{i \geq 1} i^{m_i} m_i!,$$

dove m_i è il numero di parti di λ uguali a i . Allora vale

Teorema 4.9.

$$\begin{aligned} H(t) &= \sum_{\lambda} z_\lambda^{-1} p_\lambda t^{|\lambda|}, \\ E(t) &= \sum_{\lambda} \varepsilon_\lambda z_\lambda^{-1} p_\lambda t^{|\lambda|}. \end{aligned}$$

Dimostrazione. È sufficiente provare la prima; la seconda seguirà applicando l'involuzione ω . Abbiamo

$$H(t) = \exp\left(\sum_{r \geq 1} p_r t^r / r\right) = \prod_{r \geq 1} \exp(p_r t^r / r) = \prod_{r \geq 1} \sum_{m_r \geq 0} (p_r t^r)^{m_r} / r^{m_r} m_r!.$$

da cui la tesi. □

4.4 Funzioni di Schur

Sia $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, definiamo il polinomio antisimmetrico

$$a_\alpha = a_\alpha(x_1, \dots, x_n) = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) w(x^\alpha),$$

dove $\varepsilon(w)$ è il segno della permutazione w . Poiché è un polinomio antisimmetrico, in particolare $a_\alpha = 0$ a meno che gli α_i siano tutti distinti. Possiamo dunque supporre $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n$ e possiamo scrivere $\alpha = \lambda + \delta$ dove λ è una partizione di lunghezza minore o uguale ad n e $\delta = (n-1, n-2, \dots, 0)$. Allora

$$a_\alpha = a_{\lambda+\delta} = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) w(x^{\lambda+\delta}),$$

che può essere scritto come $\det(x_i^{\lambda_j + n - j})_{1 \leq i, j \leq n}$.

Questo determinante è divisibile in $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ da ognuna delle differenze $x_i - x_j$ ($1 \leq i < j \leq n$) e dunque dal loro prodotto che è il determinante di Vandermonde

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) = a_\delta.$$

Definizione 4.8. La funzione di Schur nelle variabili x_1, \dots, x_n relativa alla partizione λ (con $\ell(\lambda) \leq n$), è

$$s_\lambda = a_{\lambda+\delta}/a_\delta.$$

Osserviamo che $s_\lambda \in \Lambda_n$ ed è un polinomio simmetrico omogeneo di grado $|\lambda|$.

Teorema 4.10. *Le funzioni di Schur s_λ al variare di λ tra le partizioni con $\ell(\lambda) \leq n$ formano una \mathbb{Z} -base di Λ_n .*

Dimostrazione. I polinomi $a_{\lambda+\delta}$ al variare di λ fra le partizioni di lunghezza minore o uguale a n , formano una \mathbb{Z} -base dello \mathbb{Z} -modulo A_n dei polinomi antisimmetrici in x_1, \dots, x_n . La moltiplicazione per a_δ è un isomorfismo di Λ_n su A_n . □

Le formule che legano le s_λ a gli h_i e a gli e_i sono riassunte nel seguente

Teorema 4.11 (Formule di Jacobi-Trudi).

$$s_\lambda = \det(h_{\lambda_i - i + j})_{1 \leq i, j \leq n}$$

dove $n \geq \ell(\lambda)$ e

$$s_\lambda = \det(e_{\lambda'_i - i + j})_{1 \leq i, j \leq m}$$

dove $m \geq \ell(\lambda')$.

Dimostriamo solo la prima. Lavorando con n variabili x_1, \dots, x_n , sia $e_r^{(k)}$ per $k = 1, 2, \dots, n$ la r -esima funzione simmetrica elementare nelle variabili $x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$ (rimuovendo x_k), e sia M la matrice $n \times n$ definita come

$$M = ((-1)^{n-i} e_{n-i}^{(k)})_{1 \leq i, k \leq n}.$$

Il teorema sarà una conseguenza del seguente

Lemma 4.12. *Per ogni $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ poniamo*

$$A_\alpha = (x_j^{\alpha_i}), \quad H_\alpha = (h_{\alpha_i - n + j})$$

(matrici $n \times n$), allora $A_\alpha = H_\alpha M$.

Dimostrazione. Poniamo

$$E^{(k)}(t) = \sum_{r=0}^{n-1} e_r^{(k)} t^r = \prod_{i \neq k} (1 + x_i t).$$

Allora

$$H(t)E^{(k)}(-t) = (1 - x_k t)^{-1}$$

confrontando i coefficienti di t^{α_i} otteniamo

$$\sum_{j=1}^n h_{\alpha_i - n + j} (-1)^{n-j} e_{n-j}^{(k)} = x_k^{\alpha_i}$$

da cui la tesi. □

Dimostrazione del teorema. Se ora passiamo ai determinante nel lemma precedente, otteniamo

$$a_\alpha = \det(A_\alpha) = \det(H_\alpha) \det(M),$$

e in particolare $\det M = a_\delta$, visto che $\det(H_\delta) = 1$. Quindi

$$a_\alpha = a_\delta \det(H_\alpha),$$

che possiamo anche scrivere come

$$a_\alpha = a_\delta \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w) h_{\alpha - w\delta}.$$

Se prendiamo $\alpha = \lambda + \delta$, segue la tesi. □

Osserviamo che per ogni λ , $\omega(s_\lambda) = s_{\lambda'}$.

Come conseguenza delle formule determinantal, si ha che

$$s_{(n)} = \det(h_n) = h_n, \quad s_{(1, \dots, 1)} = e_n.$$

4.5 Ortogonalità

Siano $x = (x_1, x_2, \dots)$ e $y = (y_1, y_2, \dots)$ due sequenze finite o infinite di variabili indipendenti. Denotiamo le funzioni simmetriche delle x con $s_\lambda(x)$, $p_\lambda(x)$ etc., e le funzioni simmetriche delle y con $s_\lambda(y)$, $p_\lambda(y)$ etc.

Daremo tre espansioni in serie per il prodotto

$$\prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1}.$$

Teorema 4.13. *Si ha*

$$\begin{aligned} (a) \quad & \prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\lambda} z_\lambda^{-1} p_\lambda(x) p_\lambda(y) \\ (b) \quad & \prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\lambda} h_\lambda(x) m_\lambda(y) = \sum_{\lambda} h_\lambda(y) m_\lambda(x) \\ (c) \quad & \prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\lambda} s_\lambda(x) s_\lambda(y) \end{aligned}$$

Dimostrazione. La prima segue dalla catena di uguaglianze

$$\sum_{\lambda} z_\lambda^{-1} p_\lambda(xy) t^{|\lambda|} = H(t) = \prod_{i,j} (1 - x_i y_j t)^{-1}$$

e dal fatto che $p_\lambda(xy) = p_\lambda(x) p_\lambda(y)$.

Per la (b) abbiamo

$$\begin{aligned} \prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} &= \prod_j H(y_j) = \prod_j \sum_{r=0}^{\infty} h_r(x) y_j^r = \\ &= \sum_{\alpha} h_{\alpha}(x) y^{\alpha} = \sum_{\lambda} h_{\lambda}(x) m_{\lambda}(y) \end{aligned}$$

dove α varia fra le successioni $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ di interi non negativi tali che $\sum \alpha_i < \infty$ e λ varia fra le partizioni.

Per la (c) consideriamo $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ due insiemi finiti di variabili e $\delta = (n-1, n-2, \dots, 0)$. Allora per il punto (b) si ha

$$a_{\delta}(x) a_{\delta}(y) \prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = a_{\delta}(x) \sum_{\alpha, w} h_{\alpha}(x) \varepsilon(w) y^{\alpha + w\delta},$$

dove l'ultima somma è fatta su tutti $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $w \in S_n$; con un cambio di variabili si ottiene

$$= a_{\delta}(x) \sum_{\beta, w} \varepsilon(w) h_{\beta - w\delta}(x) y^{\beta} = \sum_{\beta} a_{\beta}(x) y^{\beta}.$$

Poiché $a_{w\beta} = \varepsilon(w) a_{\beta}$, segue che l'ultima somma è uguale a $\sum a_{\gamma}(x) a_{\gamma}(y)$ dove la somma è fatta su $\gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_n \geq 0$, ovvero

$$\sum_{\lambda} a_{\lambda+\delta}(x) a_{\lambda+\delta}(y),$$

dove la somma è fatta su tutte le partizioni λ di lunghezza $\leq n$. La tesi si ottiene facendo il limite per $n \rightarrow \infty$. \square

Definiamo ora un prodotto scalare (forma bilineare a valori in \mathbb{Z}) su Λ , in modo tale che le basi (h_{λ}) e (m_{λ}) siano una la duale dell'altra, ovvero

$$\langle h_{\lambda}, m_{\mu} \rangle = \delta_{\lambda\mu}$$

per ogni partizione λ e μ , dove $\delta_{\lambda\mu}$ è il delta di Kronecker.

Teorema 4.14. *Per ogni $n \geq 0$, siano (u_{λ}) e (v_{λ}) \mathbb{Z} -basi di Λ^n , indicizzate dalle partizioni di n . Le seguenti condizioni sono equivalenti*

1. $\langle u_{\lambda}, v_{\mu} \rangle = \delta_{\lambda\mu}$ per ogni λ e μ ;
2. $\sum_{\lambda} u_{\lambda}(x) v_{\lambda}(y) = \prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1}$.

Dimostrazione. Siano

$$u_{\lambda} = \sum_{\rho} a_{\lambda\rho} h_{\rho}, \quad v_{\mu} = \sum_{\sigma} b_{\mu\sigma} m_{\sigma}.$$

Allora

$$\langle u_\lambda, v_\mu \rangle = \sum_{\rho} a_{\lambda\rho} b_{\mu\rho}$$

e dunque la 1 è equivalente a

$$\sum_{\rho} a_{\lambda\rho} b_{\mu\rho} = \delta_{\lambda\mu}.$$

La 2 è equivalente all'identità

$$\sum_{\lambda} u_\lambda(x) v_\lambda(y) = \sum_{\rho} h_\rho(x) m_\rho(y)$$

per il teorema precedente e dunque è equivalente a

$$\sum_{\lambda} a_{\lambda\rho} b_{\lambda\sigma} = \delta_{\rho\sigma}.$$

Si conclude che 1 e 2 sono effettivamente equivalenti. □

Per quanto visto, segue che

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu} z_\lambda$$

e dunque i p_λ formano una base ortogonale di Λ . In più si ha anche

$$\langle s_\lambda, s_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$$

e dunque gli s_λ formano una base ortonormale di Λ e gli s_λ con $|\lambda| = n$ formano una base ortonormale di Λ^n .

Da queste due relazioni segue che la forma bilineare $\langle u, v \rangle$ è simmetrica e definita positiva e che l'involuzione ω è una isometria, ovvero

$$\langle \omega u, \omega v \rangle = \langle u, v \rangle.$$

La dimostrazione di questo ultimo fatto è che $\omega(p_\lambda) = \pm p_\lambda$ e dunque

$$\langle \omega(p_\lambda), \omega(p_\lambda) \rangle = \langle p_\lambda, p_\lambda \rangle$$

che prova la tesi, visto che i p_λ sono una \mathbb{Q} -base di $\Lambda_{\mathbb{Q}}$.

4.6 I caratteri dei gruppi simmetrici

Se G è un gruppo finito e f, g sono funzioni su G a valori in una \mathbb{Q} -algebra commutativa, si definisce il *prodotto scalare* di f e g ponendo

$$\langle f, g \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x) g(x^{-1}).$$

Ogni permutazione $w \in S_n$ si fattorizza in modo unico in prodotto di cicli disgiunti. Se gli ordini di questi cicli sono $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots$, allora $\rho(w) = (\rho_1, \rho_2, \dots)$ è una partizione di n .

Definiamo una mappa $\psi : S_n \rightarrow \Lambda^n$ ponendo

$$\psi(w) = p_{\rho(w)}.$$

Se m e n sono interi positivi, possiamo immergere $S_m \times S_n$ in S_{m+n} ; non c'è ovviamente un modo unico per fare questo, ma i sottogruppi risultanti di S_{m+n} sono coniugati. Dunque se $v \in S_m$ e $w \in S_n$, è ben definito a meno di coniugio l'elemento $v \times w$ e risulta $\rho(v \times w) = \rho(v) \cup \rho(w)$ e dunque

$$\psi(v \times w) = \psi(v)\psi(w).$$

Sia R^n lo \mathbb{Z} -modulo generato dai caratteri delle rappresentazioni irriducibili di S_n e poniamo

$$R = \bigoplus_{n \geq 0} R^n,$$

con la convenzione di porre $R^0 = \mathbb{Z}$. Lo \mathbb{Z} -modulo R ha una struttura di anello definita come segue. Siano $f \in R^m$ e $g \in R^n$; allora $f \times g$ è un carattere di $S_m \times S_n$ e definiamo

$$f \bullet g = \text{Ind}_{S_m \times S_n}^{S_{m+n}} (f \times g),$$

che è un carattere di S_{n+m} ovvero un elemento di R^{n+m} . Non è difficile verificare che con questo prodotto, R risulta un anello graduato, commutativo, associativo con elemento identico.

In più se $f = \sum f_n$ e $g = \sum g_n$ sono due elementi di R , con $f_n, g_n \in R^n$, si definisce

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n \geq 0} \langle f_n, g_n \rangle_{S_n}.$$

Definiamo adesso una mappa \mathbb{Z} -lineare, la *mappa caratteristica*

$$\text{ch} : R \rightarrow \Lambda_{\mathbb{Q}} = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

ponendo per ogni $f \in R^n$

$$\text{ch}(f) = \langle f, \psi \rangle_{S_n} = \frac{1}{n!} \sum_{w \in S_n} f(w)\psi(w)$$

(poiché $\psi(w) = \psi(w^{-1})$).

Teorema 4.15. *La mappa caratteristica è un'isometria e costituisce un isomorfismo fra R e Λ .*

Dimostrazione. Sia f_ρ il valore di f sugli elementi di tipo ciclo ρ . Abbiamo

$$\text{ch}(f) = \sum_{|\rho|=n} z_\rho^{-1} f_\rho p_\rho;$$

ne segue che per ogni $f, g \in R^n$ si ha

$$\langle \text{ch}(f), \text{ch}(g) \rangle = \sum_{|\rho|=n} z_\rho^{-1} f_\rho g_\rho = \langle f, g \rangle_{S_n}$$

e dunque ch è un isometria.

Verifichiamo ora che si tratta effettivamente di un omomorfismo di anelli. Siano $f \in R^m$ e $g \in R^n$. Abbiamo

$$\text{ch}(f \bullet g) = \langle \text{Ind}_{S_m \times S_n}^{S_{m+n}}(f \times g), \psi \rangle_{S_{m+n}} = \langle f \times g, \text{Res}_{S_m \times S_n}^{S_{m+n}}(\psi) \rangle_{S_m \times S_n}$$

(dove l'ultima uguaglianza è per la reciprocità di Frobenius)

$$= \frac{1}{n!m!} \sum_{(u,w)} f(u)g(w)\psi(u^{-1}w^{-1}) = \langle f, \psi \rangle_{S_m} \langle g, \psi \rangle_{S_n} = \text{ch}(f) \text{ch}(g).$$

Sia ora ψ_n il carattere banale di S_n . Allora

$$\text{ch}(\psi_n) = \sum_{|\rho|=n} z_\rho^{-1} p_\rho = h_n.$$

Se $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ è una qualunque partizione di n , poniamo $\psi_\lambda = \psi_{\lambda_1} \bullet \psi_{\lambda_2} \bullet \dots$. Dunque ψ_λ è un carattere di S_n e vale $\text{ch}(\psi_\lambda) = h_\lambda$ e dunque la mappa è surgettiva.

Per ogni partizione λ di n definiamo adesso

$$\chi^\lambda = \det(\psi_{\lambda_i - i + j})_{1 \leq i, j \leq n} \in R^n.$$

Per le formule determinantal segue che

$$\text{ch}(\chi^\lambda) = s_\lambda.$$

Poiché ch è un'isometria, segue che $\langle \chi^\lambda, \chi^\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$ per ogni coppia di partizioni λ e μ e in particolare che i χ^λ sono a meno del segno caratteri irriducibili di S_n . Dal momento che il numero di classi di coniugio in S_n è uguale al numero di partizioni di n , questi caratteri esauriscono tutti i caratteri irriducibili di S_n ; dunque i χ^λ con $|\lambda| = n$ formano una base di R^n e dunque ch è un isomorfismo di R^n su Λ^n per ogni n e dunque un isomorfismo di R su Λ . □

Vogliamo dimostrare ora che i χ^λ sono i caratteri irriducibili di S_n . Per fare questo, abbiamo bisogno di alcune nozioni.

Per prima cosa definiamo i *numeri di Kostka*. Siano $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$ e $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ due partizioni di uno stesso intero. Si definisce $k_{\mu\lambda}$ come il numero di modi di riempire il diagramma di μ con λ_1 uni, λ_2 due, \dots , λ_k k in modo che ogni riga risulti non decrescente e ogni colonna risulti crescente (un diagramma riempito in questo modo prende il nome di *Tableaux semistandard*).

Per esempio, se $\mu = (4, 3, 2)$ e $\lambda = (3, 2, 2, 1, 1)$, un possibile riempimento è il seguente

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 3 & \\ \hline 4 & 5 & & \\ \hline \end{array} .$$

Notiamo subito che $k_{\mu\lambda} \neq 0 \iff \lambda \prec \mu$.

Teorema 4.16. *Vale la seguente relazione*

$$s_\mu = \sum_{\lambda} k_{\mu\lambda} m_\lambda$$

o equivalentemente

$$h_\lambda = \sum_{\mu} k_{\mu\lambda} s_\mu.$$

La dimostrazione di questo teorema si fa per induzione, sfruttando il seguente

Lemma 4.17 (Regola di Pieri). *Vale la seguente relazione*

$$s_\mu h_r = \sum_{\lambda} s_\lambda,$$

dove la somma è fatta su tutti i λ ottenuti da μ aggiungendo r caselle ma non due sulla stessa colonna.

Dimostrazione. Sia $\omega : \Lambda \rightarrow \Lambda$ la solita involuzione, quella che fa corrispondere e_r con h_r e s_λ con $s_{\lambda'}$. Applicando ω la tesi da dimostrare diventa

$$s_{\mu'} e_r = \sum_{\lambda} s_{\lambda'}$$

o riparametrizzando

$$s_\mu e_r = \sum_{\lambda} s_\lambda,$$

dove questa volta la somma è fatta su tutti i λ ottenuti da μ aggiungendo r caselle ma non due sulla stessa riga.

Consideriamo finite variabili x_1, \dots, x_n . Vogliamo dimostrare che

$$a_{\mu+\delta}e_r = \sum_{\lambda} a_{\lambda+\delta}.$$

Daltra parte abbiamo che

$$a_{\mu+\delta}e_r = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w)x^{w(\mu+\delta)} \cdot \sum_{\alpha} x^{\alpha},$$

dove $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\alpha_i \in \{0, 1\}$ e $\sum \alpha_i = r$. Dunque

$$a_{\mu+\delta}e_r = \sum_{w \in S_n} \varepsilon(w)x^{w(\mu+\delta)} \cdot \sum_{\alpha} x^{w(\alpha)} = \sum_{w, \alpha} \varepsilon(w)x^{w(\mu+\delta+\alpha)} = \sum_{\alpha} a_{\mu+\alpha+\delta}$$

e dobbiamo considerare solo gli α tali che $\alpha + \mu$ sia ancora una partizione. □

Osserviamo che $h_r = s_{(r)}$ e dunque fare $s_{\mu}h_r$ corrisponde in R a fare

$$\chi_{V_{\lambda}} \bullet \chi_{V_{(r)}} = \text{Ind}_{S_n \times S_r}^{S_{n+r}} (V_{\lambda} \otimes \text{banale}).$$

In particolare quando $r = 1$

$$\text{Ind}_{S_n}^{S_{n+1}} V_{\mu} = \chi_{V_{\mu}} \bullet \chi_{V_{\square}} = \sum_{\lambda} V_{\lambda},$$

dove la somma è sui λ ottenuti da μ aggiungendo una casella.

Per esempio

$$\text{Ind}_{S_5}^{S_6} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array}.$$

Sfruttando la reciprocità di Frobenius è possibile in questo modo vedere come si restringono certe rappresentazioni, per esempio

$$\text{Res}_{S_5}^{S_6} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \end{array}.$$

Sia V una S_n -rappresentazione e supponiamo di sapere che ristretto all'azione di S_{n-1} , V abbia la seguente decomposizione

$$V \cong_{S_{n-1}} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}.$$

Allora V come S_n -modulo non può che essere la rappresentazione standard.

Proposizione 4.18. *Vale la seguente relazione*

$$\psi_{\lambda}(\rho) = \sum_{\mu} k_{\mu\lambda} \chi^{\mu}(\rho).$$

Dimostrazione. Abbiamo visto che $h_\lambda = \text{ch}(\psi_\lambda) = \sum_\rho z_\rho^{-1} \psi_\lambda(\rho) p_\rho$, da cui si deduce che $\langle h_\lambda, p_\rho \rangle = \psi_\lambda(\rho)$ e poiché gli h_λ e i m_μ sono tali che $\langle h_\lambda, m_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$, segue che

$$p_\rho = \sum_\lambda \psi_\lambda(\rho) m_\lambda.$$

Analogamente, dalla relazione $s_\lambda = \text{ch}(\chi^\lambda)$ segue che

$$p_\rho = \sum_\mu \chi^\mu(\rho) s_\mu.$$

Mettendo assieme le due formule si ottiene

$$\begin{aligned} p_\rho &= \sum_\lambda \psi_\lambda(\rho) m_\lambda = \sum_\mu \chi^\mu(\rho) s_\mu = \\ &= \sum_{\mu, \lambda} \chi^\mu(\rho) k_{\mu\lambda} m_\lambda = \sum_\lambda \left(\sum_\mu k_{\mu\lambda} \chi^\mu(\rho) \right) m_\lambda \end{aligned}$$

da cui segue facilmente la tesi. □

Osserviamo che poiché $k_{\lambda\lambda} = 1$ e $k_{\mu\lambda} = 0$ se $\mu \not\preceq \lambda$, si ha che

$$\psi_\lambda(\rho) = \chi^\lambda(\rho) + \sum_{\lambda \preceq \mu} k_{\mu\lambda} \chi^\mu(\rho).$$

Teorema 4.19. *I caratteri irriducibili di S_n sono i χ^λ con $|\lambda| = n$ e più precisamente vale $\chi^\lambda = \chi_{V_\lambda}$.*

Dimostrazione. Osserviamo che ψ_λ è il carattere di $U_\lambda = \text{Ind}_{S_\lambda}^{S_n}$ (banale). Proviamo che V_λ è uno degli addendi nella decomposizione di U_λ in irriducibili. Infatti l'applicazione $\cdot b_\lambda$ manda surgettivamente $U_\lambda = \mathbb{C}S_n a_\lambda$ in V_λ . Sappiamo che

$$\psi_\lambda = \sum_\mu \eta_{\lambda\mu} \chi_{V_\mu}$$

dove $\eta_{\lambda\lambda} \geq 1$. Procediamo per induzione su λ essendo il caso $\lambda = (n)$ ovvio. Fissiamo dunque λ e supponiamo per ipotesi induttiva che per ogni $\lambda \preceq \mu$ risulti $\chi^\mu = \chi_{V_\mu}$. Allora vale

$$\psi_\lambda = \chi^\lambda + \sum_{\lambda \preceq \mu} k_{\mu\lambda} \chi_{V_\mu}$$

e confrontando le due espressioni di ψ_λ si arriva alla tesi. □

Corollario 4.20. *Per ogni μ partizione di n , la dimensione di V_μ è $k_{\mu(1, \dots, 1)}$ che è il numero di Tableaux standard di μ .*

Dimostrazione.

$$\sum_{\mu} k_{\mu(1, \dots, 1)} V_{\mu} = \text{Ind}_{S_1 \times \dots \times S_1}^{S_n} (\text{banale}) = \mathbb{C}S_n = \sum_{\mu} \dim(V_{\mu}) V_{\mu}.$$

□

Per esempio consideriamo il diagramma $\begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \square \\ \square & & & \end{array}$. Per effettuare un riempimento che lo renda un tableaux standard, bisogna che l'1 stia nella prima casella della prima riga e poi ci sono 4 modi di scegliere l'elemento della seconda riga; dunque

$$\dim \begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \square \\ \square & & & \end{array} = 4.$$

Si possono fare solo due tableaux standard con il diagramma $\begin{array}{cc} \square & \square \\ \square & \square \end{array}$ e infatti

$$\dim \begin{array}{cc} \square & \square \\ \square & \square \end{array} = 2.$$

Come ulteriore esempio calcoliamo la decomposizione di $U_{(6,3)}$. Gli $\mu \succeq (6,3)$ sono $(6,3), (7,2), (8,1), (9)$ e in ogni caso $k_{\mu(6,3)} = 1$ da cui

$$U_{(6,3)} = V_{(6,3)} + V_{(7,2)} + V_{(8,1)} + V_{(9)}.$$

Vediamo una applicazione della regola di Pieri. Cerchiamo di determinare la decomposizione in S_d (con $d \geq 4$) di

$$\begin{array}{cccc} \overbrace{\square \square \square \square}^{d-1} & \otimes & \overbrace{\square \square \square \square}^{d-1} \\ \square & & \square \end{array}.$$

4.7 Due esercizi

Abbiamo visto in un capitolo precedente che se B indica la rappresentazione banale e U una qualunque rappresentazione di S_d , vale

$$U \otimes \text{Ind}_{S_{d-1}}^{S_d} (B) = \text{Ind}(\text{Res}_{S_{d-1}}^{S_d} (U)).$$

In particolare prendendo $U = \begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \square \\ \square & & & \end{array}$ si ha

$$\begin{aligned} \begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \square \\ \square & & & \end{array} \otimes (\begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \square \\ \square & & & \end{array} \oplus \begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \square \\ \square & & & \end{array}) &\cong \text{Ind}(\text{Res}(\begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \square \\ \square & & & \end{array})) = \text{Ind}(\overbrace{\begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \square \\ \square & & & \end{array}}^{d-1} + \overbrace{\begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \square \\ \square & & & \end{array}}^{d-2}) \\ &= \overbrace{\begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \square \\ \square & & & \end{array}}^d \oplus \overbrace{\begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \square \\ \square & & & \end{array}}^{d-1} \oplus \overbrace{\begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \square \\ \square & & & \end{array}}^{d-1} \oplus \overbrace{\begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \square \\ \square & & & \end{array}}^{d-2} \oplus \overbrace{\begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \square \\ \square & & & \end{array}}^{d-2} \end{aligned}$$

da cui si ricava

$$\begin{array}{cccc} \overbrace{\square \square \square \square}^{d-1} & \otimes & \overbrace{\square \square \square \square}^{d-1} & = & \overbrace{\square \square \square \square}^d & \oplus & \overbrace{\square \square \square \square}^{d-1} & \oplus & \overbrace{\square \square \square \square}^{d-2} & \oplus & \overbrace{\square \square \square \square}^{d-2} \end{array}$$

Dimostriamo che $\bigwedge^s V_{(n-1,1)} = V_\lambda$ con $\lambda = (n-s, 1, \dots, 1)$. Procediamo per induzione su s , essendo il caso $s = 1$ ovvio. Abbiamo che come S_{n-1} modulo

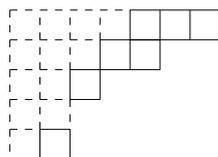
$$\bigwedge^s V_{(n-1,1)} = \bigwedge^s (V_{(n-2,1)} + B) = \bigwedge^s V_{(n-2,1)} \oplus \bigwedge^{s-1} V_{(n-2,1)} = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2},$$

dove $\lambda_1 = (n-1-s, 1, \dots, 1)$ e $\lambda_2 = (n-s, 1, \dots, 1)$. Applicando la regola di pieri si ha la tesi.

4.8 La regola di Littlewood-Richardson

4.8.1 Diagrammi skew

Se λ e μ sono partizioni, scriveremo $\lambda \supseteq \mu$ per intendere che il diagramma di λ contiene il diagramma di μ , ovvero $\lambda_i \geq \mu_i$, per ogni $i \geq 1$. Se $\lambda \supseteq \mu$, la differenza di insiemi dei diagrammi λ e μ è detta *diagramma skew* e si indica con $\vartheta = \lambda/\mu$. Per esempio se $\lambda = (75322)$ e $\mu = (43221)$, il diagramma skew λ/μ è la regione indicata nella figura:

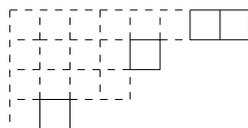


Un *cammino* in un diagramma skew ϑ è una successione di caselle x_0, \dots, x_m in ϑ tali che x_{i-1} e x_i hanno un lato in comune, per $i = 1, \dots, m$. Un sottoinsieme ϕ di ϑ è detto *connesso* se ogni coppia di caselle in ϕ può essere collegata da un cammino in ϕ . I sottoinsiemi connessi massimali di ϑ sono anch'essi diagrammi skew, e sono detti *componenti connesse* di ϑ . Nell'esempio ci sono tre componenti connesse.

Il *coniugato* di un diagramma skew $\vartheta = \lambda/\mu$ è $\vartheta' = \lambda'/\mu'$. Poniamo $\vartheta_i = \lambda_i/\mu_i$, $\vartheta'_i = \lambda'_i/\mu'_i$, e definiamo il peso $|\vartheta|$ come

$$|\vartheta| = \sum \vartheta_i = |\lambda| - |\mu|.$$

Un diagramma skew ϑ è una *m-striscia orizzontale* (risp. *verticale*) se $|\vartheta| = m$ e, per ogni $i \geq 1$, $\vartheta'_i \leq 1$ (risp. $\vartheta_i \leq 1$). Una striscia orizzontale occupa quindi al più una casella per colonna (analogamente per una striscia verticale). Il seguente diagramma è una 4-striscia orizzontale



Una condizione necessaria e sufficiente perché $\vartheta = \lambda/\mu$ sia una striscia orizzontale è che λ e μ siano interlacciati, ovvero $\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \dots$.

Un *tableau skew* T è una successione di partizioni

$$\mu = \lambda^{(0)} \subseteq \lambda^{(1)} \subseteq \dots \subseteq \lambda^{(r)} = \lambda$$

tali che per $i = 1, \dots, r$ ciascun diagramma skew $\vartheta^{(i)} = \lambda^{(i)}/\lambda^{(i-1)}$ sia una striscia orizzontale. Possiamo dare una descrizione grafica del tableau T scrivendo i in ciascuna casella del diagramma skew $\vartheta^{(i)}$, ed è spesso comodo pensare ad un tableau in questo modo, come a un diagramma skew numerato. I numeri scritti in λ/μ devono crescere strettamente scendendo lungo ogni colonna e debolmente da sinistra a destra sulle righe. Il diagramma skew λ/μ è detto *forma* del tableau T , e la successione $(|\vartheta^{(1)}|, |\vartheta^{(2)}|, \dots, |\vartheta^{(r)}|)$ è detta *peso* di T .

4.8.2 Funzioni di Schur skew

Ogni funzione simmetrica $f \in \Lambda$ è univocamente determinata dai suoi prodotti scalari con gli s_λ , per l'esattezza

$$f = \sum_{\lambda} \langle f, s_{\lambda} \rangle s_{\lambda},$$

visto che gli s_λ formano una base ortonormale di Λ . Siano ora λ e μ partizioni, definiamo le funzioni simmetriche $s_{\lambda/\mu}$ imponendo che siano verificate le relazioni

$$\langle s_{\lambda/\mu}, s_{\nu} \rangle = \langle s_{\lambda}, s_{\mu} s_{\nu} \rangle$$

per tutte le partizioni ν . Gli $s_{\lambda/\mu}$ sono detti *funzioni di Schur skew*. Equivalentemente, se gli interi $c_{\mu\nu}^{\lambda}$ sono definiti da

$$s_{\mu} s_{\nu} = \sum_{\lambda} c_{\mu\nu}^{\lambda} s_{\lambda},$$

allora abbiamo che

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_{\nu} c_{\mu\nu}^{\lambda} s_{\nu}.$$

È in particolare chiaro che $s_{\lambda/0} = s_{\lambda}$, dove 0 è la partizione zero. Inoltre $c_{\mu\nu}^{\lambda} = 0$ se λ , μ e ν non soddisfano $|\lambda| = |\mu| + |\nu|$, e quindi $s_{\lambda/\mu}$ è omogeneo di grado $|\lambda| - |\mu|$.

Per le funzioni di Schur skew, valgono degli analoghi delle formule che abbiamo visto per le funzioni di Schur. Per esempio valgono le formule determinantal

$$s_{\lambda/\mu} = \det(h_{\lambda_i - \mu_j - i + j})_{1 \leq i \leq j \leq n},$$

con $n \geq \ell(\lambda)$ e

$$s_{\lambda/\mu} = \det(e_{\lambda'_i - \mu'_j - i + j})_{1 \leq i \leq j \leq m},$$

con $m \geq \ell(\lambda')$. Da queste due formule segue anche che l'involuzione ω è tale che

$$\omega(s_{\lambda/\mu}) = s_{\lambda'/\mu'}.$$

In più, se definiamo $K_{\lambda/\mu, \nu}$ come il numero di tableaux skew di forma λ/μ e peso ν , vale

$$K_{\lambda/\mu, \nu} = \langle s_{\lambda/\mu}, h_{\nu} \rangle.$$

Per le dimostrazioni vedere [2, Cap. 1, paragrafo 5]

4.8.3 Dimostrazione della regola

In questa sezione diamo l'enunciato e la dimostrazione di una regola combinatoria per calcolare i $c_{\mu\nu}^{\lambda}$ dovuta a Littlewood e Richardson.

Sia T un tableau. Da T deriviamo una *parola* o successione $w(T)$ leggendo i simboli in T da destra a sinistra riga per riga, a partire dalla riga in alto. Per esempio, se T è il tableau

$$\begin{array}{cccc} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ & \boxed{2} & \boxed{3} & \\ \boxed{1} & \boxed{4} & & \end{array}$$

allora $w(T)$ è la parola 32113241. Se una tale parola w deriva in questo modo da un tableau di forma λ/μ , diremo che w è *compatibile* con λ/μ . Una parola $w = a_1 a_2 \dots a_N$ nei simboli $1, 2, \dots, n$ è detta *permutazione di reticolo* se per $1 \leq r \leq N$ e $1 \leq i \leq n - 1$, il numero di occorrenze del simbolo i in $a_1 a_2 \dots a_r$ è almeno il numero di occorrenze di $i + 1$.

Possiamo ora enunciare la regola di Littlewood-Richardson:

Proposizione 4.21. *Siano λ, μ, ν partizioni. Allora $c_{\mu\nu}^{\lambda}$ è uguale al numero di tableau T di forma λ/μ e peso ν tali che $w(T)$ è una permutazione di reticolo.*

La dimostrazione che daremo dipende dalla seguente proposizione. Se λ, μ, π sono partizioni tali che $\lambda \supseteq \mu$, denotiamo con $\text{Tab}(\lambda/\mu, \pi)$ l'insieme dei tableau T di forma λ/μ e peso π , e sia $\text{Tab}^0(\lambda/\mu, \pi)$ il sottoinsieme dei T tali che $w(T)$ è una permutazione di reticolo. Allora

$$|\text{Tab}(\lambda/\mu, \pi)| = K_{\lambda/\mu, \pi} = \langle s_{\lambda/\mu}, h_{\pi} \rangle.$$

Dimostreremo che

Proposizione 4.22. *Esiste una bigezione*

$$\text{Tab}(\lambda/\mu, \pi) \xrightarrow{\sim} \coprod_{\nu} (\text{Tab}^0(\lambda/\mu, \nu) \times \text{Tab}(\nu, \pi)).$$

Prima di dimostrare questa proposizione, mostriamo come da essa segua la proposizione 4.21. Dalla 4.22 abbiamo che

$$\langle s_{\lambda/\mu}, h_\pi \rangle = \sum_{\nu} |\text{Tab}^0(\lambda/\mu, \nu)| \langle s_\nu, h_\pi \rangle$$

per tutte le partizioni π , e quindi

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_{\nu} |\text{Tab}^0(\lambda/\mu, \nu)| s_\nu.$$

Il confronto di questa identità con $s_{\lambda/\mu} = \sum_{\nu} c_{\mu\nu}^\lambda s_\nu$ ci mostra che $c_{\mu\nu}^\lambda = |\text{Tab}^0(\lambda/\mu, \nu)|$.

Per costruire la bigezione necessaria per la proposizione 4.22, usiamo l'ingegnoso metodo inventato da Littlewood e Robinson, che consiste nel partire da un tableau T di forma λ/μ e modificarlo successivamente fino a che la parola $w(T)$ non sia diventata una permutazione di reticolo, costruendo durante il procedimento un tableau M , che serve a registrare le mosse fatte.

Se $w = a_1 a_2 \dots a_N$ è una qualunque parola nei simboli $1, 2, \dots$, sia $m_r(w)$ il numero di occorrenze di r in w . Per $p = 1, \dots, N$ e $r \geq 2$, la differenza $m_r(a_1 \dots a_p) - m_{r-1}(a_1 \dots a_p)$ è detta r -indice di a_p in w . Si osservi che w è una permutazione di reticolo se e solo se tutti gli indici sono ≤ 0 .

Per r fissato, sia m il massimo valore degli r -indici in w , e supponiamo che sia $m > 0$. Prendiamo il primo elemento di w in cui il massimo è raggiunto (che sarà chiaramente un r), e rimpiazzamolo con $r-1$. Chiamiamo il risultato di questa operazione $S_{r-1,r}(w)$ (sostituzione di $r-1$ al posto di r). Osserviamo che $S_{r-1,r}(w)$ ha r -indice massimo $m-1$ (a meno che $m=1$, nel qual caso potrebbe anche essere -1 quando si stia sostituendo il primo elemento di w).

Proposizione 4.23. *L'operazione $S_{r-1,r}$ è uno-a-uno.*

Dimostrazione. Sia $w' = S_{r-1,r}(w)$. Per ricostruire w da w' , sia m' il massimo r -indice in w' . Se $m' \geq 0$, si prenda l'ultimo simbolo w' con r -indice m' , e si converta il simbolo successivo (che deve essere un $r-1$) in un r . Se $m' < 0$, il primo simbolo in w' deve essere un $r-1$, e questo è convertito in un r . In ogni caso il risultato è w , che è quindi univocamente determinato da w' e r . \square

Proposizione 4.24. *Sia $w' = S_{r-1,r}(w)$. Allora w' è compatibile con λ/μ se e solo se w è compatibile con λ/μ .*

Dimostrazione. Siano $w = w(T), w' = w(T')$, dove T e T' sono diagrammi di forma λ/μ . Essi differiscono in una sola casella, x poniamo, che in T è occupata da r e in T' da $r-1$.

Supponiamo che T sia un tableau. Se T' non è un tableau deve verificarsi una delle seguenti possibilità: (a) la casella immediatamente a sinistra di x

è occupata da un r , o (b) quella immediatamente sopra è occupata da un $r - 1$.

Nel caso (a) il simbolo r nella casella y dovrebbe avere un r -indice maggiore in $w(T)$ della casella contenente x , e questo è impossibile. Nel caso (b), la casella x in T sarà l'ultima a sinistra di una stringa di s , poniamo, case occupate dal simbolo r , e immediatamente sopra a questa stringa dovrà esserci una stringa di s caselle occupate dal simbolo $r - 1$. Abbiamo quindi che $w(T)$ contiene un segmento della forma

$$(r - 1)^s \dots r^s$$

dove i simboli non scritti tra le due stringhe sono tutti o $< r - 1$ o $> r$, e l'ultimo r è quello che sta venendo rimpiazzato con un $r - 1$ per formare w' . Ma l' r -indice di questo r è uguale a quello dell'elemento di w immediatamente prima della stringa degli $(r - 1)$ (che esiste, perché l' r -indice è diverso da zero), e questo è nuovamente impossibile. Quindi se T è un tableau, anche T' lo è.

L'implicazione inversa si dimostra similmente, usando la strategia fornita nella dimostrazione della proposizione 4.23 per ritornare a w da w' . \square

Supponiamo ora che la parola w abbia la proprietà di essere una permutazione di reticolo rispetto $(1, 2, \dots, r - 1)$ ma non rispetto $(r - 1, r)$, in altre parole che gli s -indici siano tutti ≤ 0 per $s = 1, 2, \dots, r - 1$ ma non per $s = r$. Questa è l'unica situazione in cui useremo l'operatore $S_{r-1,r}$. L'effetto di rimpiazzare un r con $r - 1$ in w tramite $S_{r-1,r}$ può distruggere la proprietà di essere una permutazione di reticolo rispetto a $(r - 2, r - 1)$, ovvero potrebbe produrre qualche $(r - 1)$ -indice uguale a $+1$. In questo caso applichiamo $S_{r-2,r-1}$ per ottenere

$$S_{r-2,r}(w) = S_{r-2,r-1}S_{r-1,r}(w).$$

A questo punto gli $(r - 1)$ indici saranno nuovamente ≤ 0 , ma potrebbe esserci qualche $(r - 2)$ -indice uguale a $+1$, e così via. Questo procedimento dovrà a un certo punto terminare, e avremo a questo punto ottenuto un

$$S_{a,r}(w) = S_{a,a+1} \dots S_{r-1,r}(w)$$

per qualche a tale che $1 \leq a \leq r - 1$, e la parola $S_{a,r}(w)$ ha nuovamente la proprietà di essere una permutazione di reticolo rispetto a $(1, 2, \dots, r - 1)$, e r -indice massimale strettamente minore di quello di w .

A questo punto abbiamo bisogno del seguente lemma chiave:

Lemma 4.25. *Se $w, w' = S_{a,r}(w)$ e $w'' = S_{b,r}(w')$ hanno tutti la proprietà di essere permutazioni di reticolo rispetto a $(1, 2, \dots, r - 1)$, allora $b \leq a$.*

Dimostrazione. Sia $w = x_1x_2x_3 \dots$. Dobbiamo studiare in dettaglio il processo con cui si passa da w a w' . Si incomincia applicando $S_{r-1,r}$, ovvero rimpiazzando il primo r in w con r -indice m , dove m è il massimo r -indice, con $r-1$.

Supponiamo che questo succeda in x_{p_0} . Allora per ogni $s \geq 1$, l' $(r-1)$ -indice di x_s rimane inalterato se $s < p_0$, ed è aumentato di 1 se $s \geq p_0$. L'elemento su cui agisce $S_{r-2,r-1}$ è quindi al p_1 -esimo posto, dove p_1 è il minimo intero $\geq p_0$ tale che x_{p_1} ha $(r-1)$ -indice in w uguale a 0. Allo stesso modo, l'elemento su cui opera $S_{r-3,r-2}$ è il p_2 -esimo posto, con p_2 il minimo intero $\geq p_1$ per cui x_{p_2} ha $(r-2)$ -indice zero, e così via.

In questo modo otteniamo una successione

$$p_0 \leq p_1 \leq \dots \leq p_{r-a-1}$$

con la proprietà che, per ogni $i \geq 1$, x_{p_i} è il primo elemento che non precede $x_{p_{i-1}}$ in cui l' $(r-i)$ -indice è 0. Si osservi che in w' l'elemento al p_i -esimo posto ha ancora $(r-i)$ -indice zero, per ogni $i \geq 1$ (anche se non sarà più il primo con questa proprietà che non precede $x_{p_{i-1}}$, a meno che non si abbia $p_i = p_{i-1}$).

Consideriamo ora il passaggio da $w' = y_1y_2y_3 \dots$ a w'' . In w' il massimo r -indice è ora $m-1$ (che stiamo supponendo essere ancora positivo), e questo massimo è raggiunto per la prima volta in un posto $q_0 < p_0$ (questo è perché l' r -indice aumenta e diminuisce sempre in passi di al più uno, e quindi l' r -indice $m-1$ è raggiunto in w per la prima volta in un elemento a sinistra di x_{p_0} , e quindi anche in w' visto che gli elementi a sinistra di x_{p_0} restano fissi). In w' l' $(r-1)$ -indice di y_{p_1} è zero, e quindi è $+1$ in $S_{r-1,r}(w')$. Quindi $S_{r-1,r}(w')$ ha ancora bisogno di una sostituzione $S_{r-2,r-1}$, che avrà luogo al q_1 -esimo posto, dove q_1 è il primo intero $\geq q_0$ tale che l' $(r-1)$ -indice di y_{q_1} in w' è 0, e quindi $q_0 \leq q_1 \leq p_1$ per quanto detto. Continuando in questo modo otteniamo una successione

$$q_0 \leq q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_{r-a-1}$$

con la proprietà che $q_i \leq p_i$ per $i = 1, \dots, r-a-1$, e a w' può essere applicato l'operatore $S_{a,r}$. Se $S_{a,r}(w') = w''$, allora $b = a$, altrimenti $S_{a,r}(w')$ ammette ulteriori sostituzioni $S_{a-1,a}, \dots$, fino a raggiungere $w'' = S_{b,r}(w')$, nel qual caso $b < a$, e abbiamo quindi dimostrato in ogni caso che si deve avere $b \leq a$. □

Descriviamo ora l'algoritmo di Littlewood e Robinson che costruisce da un tableau di forma λ/μ e peso π , dove λ, μ, π sono partizioni, una coppia (L, M) , dove $L \in \text{Tab}^0(\lambda/\mu, \nu)$ per qualche partizione ν , e $M \in \text{Tab}(\nu, \pi)$. Se A è una tabella (non necessariamente un tableau), e a, r interi positivi tali che $a < r$, denotiamo con $R_{a,r}(A)$ il risultato ottenuto spostando l'ultimo elemento a destra della r -esima riga di A in alto a destra della a -esima riga.

L'algoritmo inizia con la parola $w_1 = w(T)$ e la tabella M_1 che consiste di π_1 volte 1 nella prima riga, π_2 volte 2 nella seconda, e così via (ovvero M_1 è anche l'unico tableau di forma π e peso π).

Operiamo ora su w_1 con $S_{1,2}$ fino a che non ci sono più 2-indici positivi, e simultaneamente su M_1 con $R_{1,2}$ lo stesso numero di volte: poniamo

$$w_2 = S_{1,2}^m(w_1), \quad M_2 = R_{1,2}^m M_1$$

Successivamente operiamo su w_2 con $S_{2,3}$ o $S_{1,3}$ come necessario fino a far sparire anche i 3-indici positivi, e simultaneamente su M_2 con $R_{2,3}$ o $R_{1,3}$, ad esempio

$$w_3 = \dots S_{a_2,3} S_{a_1,3}(w_2), \quad M_3 = \dots R_{a_2,3} R_{a_1,3} M_2$$

dove ogni a_1, a_2 è 1 o 2.

Continuiamo in questo modo fino ad ottenere una coppia (w_ℓ, M_ℓ) , dove $\ell = \ell(\pi)$. Chiaramente w_ℓ è ora una permutazione di reticolo per costruzione. Dalla proposizione 4.24 abbiamo che w_ℓ è compatibile con λ/μ , e quindi $w_\ell = w(L)$ dove $L \in \text{Tab}^0(\lambda/\mu, \nu)$ per qualche partizione ν . In più, abbiamo che per costruzione in ogni istante la lunghezza $\ell_i(M_r)$ della i -esima riga della tabella M_r è uguale alla molteplicità $m_i(w_r)$ del simbolo i nella parola corrispondente w_r , e quindi la tabella finale $M = M_\ell$ ha forma ν e peso π (il peso infatti resta invariato).

Dobbiamo ora mostrare che M_ℓ è un *tableau*. Per fare questo, proveremo per induzione su r che le prime r righe di M_r formano un tableau. Questo è chiaro se $r = 1$, quindi supponiamo che $r > 1$ e l'asserzione vera per $r - 1$. Consideriamo i passi che conducono da M_{r-1} a M_r : ad esempio abbiamo

$$M_r = R_{a_m, r} \dots R_{a_1, r}(M_{r-1}),$$

e poniamo per comodità

$$M_{r-1, i} = R_{a_i, r} \dots R_{a_1, r}(M_{r-1}),$$

e allo stesso modo

$$w_{r-1, i} = S_{a_i, r} \dots S_{a_1, r}(w_{r-1}),$$

dove ogni parola $w_{r-1, i}$ ha la proprietà di essere una permutazione di reticolo rispetto a $(1, 2, \dots, r - 1)$. Ogni tabella $M_{r-1, i}$ è ottenuta dalla precedente $M_{r-1, i-1}$ (o M_{r-1} se $i = 1$) spostando in alto un singolo simbolo r dalla r -esima riga alla a_i -esima. Per la nostra costruzione la lunghezza $\ell_j(M_{r-1, i})$ della j -esima riga di $M_{r-1, i}$ è uguale alla molteplicità $m_j(w_{r-1, i})$ di j in $w_{r-1, i}$, per ogni $j \geq 1$, e siccome ogni $w_{r-1, i}$ è permutazione di reticolo rispetto a $(1, 2, \dots, r - 1)$, ne segue che

$$\ell_1(M_{r-1, i}) \geq \dots \geq \ell_{r-1}(M_{r-1, i}).$$

Inoltre per il lemma 4.25 gli interi a_i soddisfano $a_1 \geq \dots \geq a_m$. Da questo segue che nessuna coppia di simboli r può comparire nella stessa colonna in nessun momento, e di conseguenza le prime r righe di M_r formano un tableau.

L'algoritmo ci ha quindi fornito una mappa

$$\text{Tab}(\lambda - \mu, \pi) \rightarrow \coprod_{\nu} (\text{Tab}^0(\lambda - \mu, \nu) \times \text{Tab}(\nu, \pi)).$$

e per completare la dimostrazione della proposizione dobbiamo dimostrare che questa mappa è di fatto una bigezione. A questo scopo ci basta mostrare che, per ogni $r \geq 1$, possiamo univocamente ritornare indietro sui nostri passi da (w_r, M_r) a (w_{r-1}, M_{r-1}) . Con la notazione sopra introdotta, abbiamo che

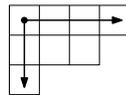
$$w_r = S_{a_m, r} \dots S_{a_1, r}(w_{r-1}),$$

e la successione (a_1, \dots, a_m) può essere letta nella tabella M_r , poiché gli a_i sono gli indici minori di r delle righe in cui sono disposti i simboli r , arrangiati in ordine discendente $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_m$ (sempre grazie al lemma 4.25). Siccome per la proposizione 4.23 ogni $S_{a, r}$ è reversibile, ne segue che (w_{r-1}, M_{r-1}) è univocamente determinato da (w_r, M_r) . Infine, grazie alla proposizione 4.24, se w_r è compatibile con λ/μ , allora anche w_{r-1} lo è e la dimostrazione è a questo punto completa. \square

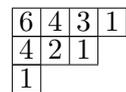
4.9 Dimensioni con gli uncini

Dato un diagramma, si definisce l'*uncino* relativo ad un quadratino come l'insieme dei quadratini che stanno sulla stessa riga alla sua destra, quelli che stanno sulla stessa colonna sotto e lui stesso.

Per esempio



Per esempio il seguente diagramma è riempito con le lunghezze degli uncini dei quadratini:



Vale il seguente

Teorema 4.26 (Formula degli uncini). *Sia λ una partizione relativa a d ; indichiamo con h_{ij} il valore dell'uncino del box che si trova nella i -esima riga e nella j -esima colonna. Allora vale*

$$\dim(V_\lambda) = \frac{d!}{\prod_{i,j} h_{ij}}$$

Dimostrazione. Abbiamo visto che $p_\rho = \sum_\lambda \chi_\lambda(\rho) s_\lambda$. In particolare per $\rho = (1^d)$ si ottiene

$$(x_1 + \cdots + x_k)^d = \sum \dim(V_\lambda) s_\lambda$$

e sostituendo $s_\lambda = a_{\lambda+\delta}/a_\delta$, si ottiene

$$a_\delta(x)(x_1 + \cdots + x_k)^d = \sum \dim(V_\lambda) a_{\lambda+\delta}.$$

Posto $l_i = \lambda_i + k - i$, espandendo $a_{\delta+\lambda}$ si ottiene che

$$\dim(V_\lambda) = [a_\delta(x)(x_1 + \cdots + x_k)^d]_{(l_1, \dots, l_k)},$$

dove con la scrittura a destra, si intende il coefficiente di $x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_k^{l_k}$ nel polinomio $a_\delta(x)(x_1 + \cdots + x_k)^d$.

Sviluppando a_δ e $(x_1 + \cdots + x_k)^d$, si ottiene che tale coefficiente è

$$\sum \varepsilon(\sigma) \frac{d!}{(l_1 - \sigma(k) + 1)! \cdots (l_k - \sigma(1) + 1)!},$$

dove la somma è fatta su i $\sigma \in S_k$ tali che $l_{k-i+1} - \sigma(i) + 1 \geq 0$ per ogni $1 \leq i \leq k$. Questa somma può essere scritta come

$$\frac{d!}{l_1! \cdots l_k!} \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^k l_j(l_j-1) \dots (l_j - \sigma(k-j+1) + 2) = \frac{d!}{l_1! \cdots l_k!} \prod_{i < j} (l_i - l_j).$$

Dimostriamo ora che questa formula equivale a quella che coinvolge le lunghezze degli uncini. Procediamo per induzione sul numero k di colonne di λ , essendo il caso $k = 1$ ovvio. Sia dunque $k > 1$. Se eliminiamo la prima colonna, per ipotesi induttiva si ha

$$\frac{(d-k)!}{\prod_{j \neq 1} h_{ij}} = \frac{(d-k)!}{l'_1! \cdots l'_k!} \prod_{i < j} (l'_i - l'_j),$$

dove $l'_i = l_i - 1$. La tesi segue allora dall'osservazione che gli uncini sulla prima colonna sono proprio i l_i e che $l'_i - l'_j = l_i - l_j$. \square

Proposizione 4.27. *Le uniche rappresentazioni irriducibili di S_d di dimensione minore di d sono la banale, la segno, la standard, la standard tensorializzata con la segno e altri 3 esempi: la rappresentazione di S_4 corrispondente a $4 = 2 + 2$ e le due di S_6 corrispondenti a $6 = 2 + 2 + 2$ e $6 = 3 + 3$.*

Traccia della dimostrazione. Sia V_λ una rappresentazione irriducibile e procediamo induttivamente eliminando la prima colonna di λ . Se dopo questa operazione ci troviamo in una delle eccezioni, un conto mostra che la tesi vale (provare per credere). Altrimenti, per ipotesi induttiva, si ha che vale

$$\frac{(d-k)!}{\prod_{j \neq 1} h_{ij}} \geq d - k,$$

da cui segue che

$$\dim(V_\lambda) \geq \frac{(d-k+1) \dots d}{l_1 \dots l_k} (d-k).$$

Rimane da provare che il membro di destra è maggiore o uguale a d , ovvero che

$$\frac{(d-k)(d-k+1) \dots (d-1)}{l_1 \dots l_k} \geq 1,$$

che adesso è ovvio. □

Capitolo 5

Il teorema di Chevalley, Shephard-Todd

5.1 Preliminari

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n < \infty$ su un campo K di caratteristica 0 e $G \subset GL(V)$ finito. Indichiamo con S l'algebra simmetrica $S[V^*]$ dello spazio duale V^* , che è l'algebra delle funzioni polinomiali su V . Rispetto ad una qualche base di V , S si può identificare con l'anello dei polinomi $K[x_1, \dots, x_n]$ dove gli x_i sono le funzioni coordinate. G agisce su S nel modo ovvio, ovvero per ogni $g \in G$, $f \in S$ e $v \in V$

$$(gf)(v) = f(g^{-1}v).$$

Poniamo $R = S^G$ la sottoalgebra di S G -invariante. Vediamo subito un esempio.

Esempio 6. Siano $V = \mathbb{C}^2$ e $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$. Allora $S = \mathbb{C}[x, y]$ e $R = \mathbb{C}[x^2, y^2] \oplus \mathbb{C}[x^2, y^2]xy$.

In questo esempio osserviamo che S come R -modulo non è libero e che R non è un'algebra di polinomi. Siamo interessati a vedere quando queste due proprietà sono invece verificate. Facciamo altri esempi.

Esempio 7. Siano $V = \mathbb{C}^n$ e $G = S_n$ dove l'azione di G su V è quella che permuta le coordinate.

In questo caso $S = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ e $R = \mathbb{C}[p_1, \dots, p_n]$ dove p_i è la i -esima funzione simmetrica elementare.

Esempio 8. $V = \mathbb{C}$ e $G = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Allora $S = \mathbb{C}[x]$ e $R = \mathbb{C}[x^d]$.

Definizione 5.1. Un elemento $g \in GL(V)$ si dice una *riflessione* (a volte *pseudoriflessione*) se, rispetto ad una qualche base, è della forma

$$g = \begin{pmatrix} \zeta & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

con ζ radice di 1.

L'obiettivo di questo capitolo è dimostrare il seguente teorema.

Teorema 5.1 (Chevalley, Shephard-Todd). *Con le notazioni introdotte fino ad ora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (A) R ha f_1, \dots, f_n generatori algebricamente indipendenti.
- (B) S è un R -modulo libero.
- (C) G è un gruppo generato da riflessioni.

5.2 Dimostrazione

La dimostrazione di questo teorema è abbastanza articolata e sarà quindi scandita attraverso una serie di proposizioni e teoremi.

5.2.1 Finita generazione

Consideriamo adesso l'azione indotta da G sul campo delle frazioni L di S che è isomorfo a $K(x_1, \dots, x_n)$, un'estensione di K con grado di trascendenza n . Qui G agisce come gruppo di automorfismi di campo e sappiamo che L è un'estensione finita di Galois del campo fissato L^G , con gruppo di Galois G . Ne segue che anche L^G ha grado di trascendenza n su K . Affermiamo che $L^G = \text{Frac}(R)$. L'inclusione \supseteq è ovvia; proviamo l'altra. Supponiamo $p/q \in L^G$ ($p, q \in S$). Moltiplichiamo il numeratore e il denominatore per $\prod g \cdot p$, dove il prodotto è fatto su tutti i $g \neq 1$ in G . Il nuovo numeratore è ovviamente G -invariante e dunque forza il denominatore a esserlo. Questo mostra che R è una sottoalgebra ragionevolmente grande di S .

Consideriamo l'ideale $I = SR_+$ di S generato dall'ideale R_+ di R costituito da elementi con termine costante 0. Scegliamo un insieme di generatori omogenei per I da R_+ . Vogliamo mostrare che ogni tale insieme con l'aggiunta dell'1 genera R come K -algebra.

Introduciamo l'operatore media; per ogni $f \in S$ definiamo $f^\#$ attraverso la formula:

$$f^\# := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot f.$$

È chiaro che la mappa $f \mapsto f^\sharp$ è lineare da S in R , preserva il grado e lascia fissi gli elementi di R .

Proposizione 5.2. *Con le notazioni sopra, supponiamo che f_1, \dots, f_r siano elementi omogenei di R_+ che generano $I = SR_+$. Allora R è generato come K -algebra da questi elementi con l'aggiunta dell'1.*

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che ogni elemento $f \in R$ è un polinomio in f_1, \dots, f_r . È sufficiente farlo per elementi omogenei f . Procediamo per induzione sul grado di f , essendo il caso di grado 0 ovvio. Sia dunque f di grado maggiore di 0; poichè $f \in I$, possiamo scrivere

$$f = s_1 f_1 + \dots + s_r f_r,$$

con gli $s_i \in S$. Poichè f, f_1, \dots, f_r sono omogenei, possiamo assumere (dopo aver rimosso termini ridondanti dagli s_i) che gli s_i siano omogenei, con $\deg s_i = \deg f - \deg f_i$ per ogni i . Applichiamo ora l'operatore media e otteniamo

$$f = f^\sharp = s_1^\sharp f_1 + \dots + s_r^\sharp f_r.$$

Ora gli s_i^\sharp sono elementi omogenei di R di grado minore del grado di f , dunque per ipotesi induttiva sono polinomiali in f_1, \dots, f_r e dunque lo è anche f . □

5.2.2 Un criterio di divisibilità

Lemma 5.3. *Sia l un polinomio omogeneo di grado 1 nelle indeterminate x_1, \dots, x_n e supponiamo che il polinomio f si annulli in tutti gli zeri di l . Allora l divide f in $K[x_1, \dots, x_n]$.*

Dimostrazione. Supponiamo senza perdita di generalità che x_n occorra con un coefficiente non nullo in l . Allora possiamo applicare l'algoritmo di divisione (rispetto a x_n) e ottenere

$$f = lq + r,$$

dove $q \in K[x_1, \dots, x_n]$ e $\deg_{x_n} r = 0$ ovvero $r \in K[x_1, \dots, x_{n-1}]$. Se r fosse diverso da 0 potremmo trovare $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}$ in K tali che $r(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}) \neq 0$. Mettendo questi valori in l possiamo risolvere un'equazione lineare per trovare \bar{x}_n tale che

$$l(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 0.$$

Per ipotesi allora anche $f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 0$ che porta all'assurdo. □

5.2.3 Lemma chiave

Lemma 5.4. *Siano $f_1, \dots, f_r \in R$ con $f_1 \notin (f_2, \dots, f_r)$ ideale di R . Supponiamo che g_1, \dots, g_r siano elementi omogenei di S che soddisfano la relazione*

$$f_1 g_1 + \dots + f_r g_r = 0.$$

Se G è generato da riflessioni allora $g_1 \in I$.

Dimostrazione. Osserviamo prima di tutto che f_1 non può stare nell'ideale di S generato da f_2, \dots, f_r ; altrimenti si avrebbe

$$f_1 = f_2 h_2 + \dots + f_r h_r,$$

con $h_i \in S$ e applicando l'operatore media si otterrebbe

$$f_1 = f_1^\# = f_2 h_2^\# + \dots + f_r h_r^\#,$$

che contraddice le ipotesi.

Per provare che $g_1 \in I$, procediamo per induzione su $\deg g_1$. Se g_1 è costante, deve essere 0 (e dunque in I) altrimenti contraddirebbe le ipotesi su f_1 . Assumiamo adesso che $\deg g_1 > 0$. Consideriamo una riflessione $s = s_\alpha \in G$ e sia l un polinomio lineare (univocamente determinato a meno di moltiplicazione per uno scalare) i cui zeri costituiscono l'iperpiano H_α fissato da s . È immediato verificare che il polinomio $sg_i - g_i$ si annulla in tutti i punti di H_α . Possiamo dunque applicare il lemma per trovare polinomi h_i tali che

$$sg_i - g_i = lh_i.$$

Sia g_i che sg_i sono omogenei dello stesso grado e dunque anche gli h_i sono omogenei con grado minore di quello dei g_i . Applichiamo ora s all'equazione che coinvolge gli f_i e i g_i e otteniamo

$$f_1(sg_1) + \dots + f_r(sg_r) = 0,$$

da cui sostituendo si ottiene

$$l(f_1 h_1 + \dots + f_r h_r) = 0.$$

Poiché l non è identicamente nulla, questo implica

$$f_1 h_1 + \dots + f_r h_r = 0.$$

Per ipotesi induttiva, visto che $\deg h_1 < \deg g_1$, abbiamo che $h_1 \in I$, ovvero $sg_1 \equiv g_1 \pmod{I}$. G è generato da riflessioni, dunque si conclude che $wg_1 \equiv g_1 \pmod{I}$ per ogni $w \in G$. Ne segue che $g_1 \equiv g_1^\# \pmod{I}$ ovvero $g_1 \in I$. \square

5.2.4 (C) \Rightarrow (A)

Nel seguito avremo bisogno di una identità dovuta a Eulero per un arbitrario polinomio omogeneo $f(x_1, \dots, x_n)$:

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = (\deg f) f.$$

Teorema 5.5. *Sia R la sottoalgebra costituita dai polinomi G invarianti. Se G è generato da riflessioni, allora R è generata come algebra da n polinomi omogenei e algebricamente indipendenti.*

Dimostrazione. Sia f_1, \dots, f_r un insieme minimale di generatori di I costituito da polinomi omogenei, invarianti e di grado positivo. Mostriamo che questi polinomi sono algebricamente indipendenti. Una volta dimostrato questo, seguirà dalla proposizione 5.2 che (insieme a 1) essi generano R come algebra. In più seguirà che $r = n$ visto che il campo delle frazioni di R deve avere grado di trascendenza n su K .

Supponiamo che f_1, \dots, f_r siano algebricamente dipendenti; allora esiste $h(y_1, \dots, y_r) \neq 0$ tale che

$$h(f_1, \dots, f_r) = 0.$$

Sia $ay_1^{e_1} \dots y_r^{e_r}$ un monomio che occorre in h . Se $d_i = \deg f_i$, poniamo $d = \sum d_i e_i$ il grado di

$$af_1^{e_1} \dots f_r^{e_r}.$$

I vari monomi in h con lo stesso d si sommano in un polinomio non nullo con la stessa proprietà di h . Dunque possiamo scartare tutti gli altri monomi di h . Differenziamo l'equazione $h(f_1, \dots, f_r) = 0$ rispetto a x_k e otteniamo

$$\sum_{i=1}^r h_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k} = 0,$$

dove $h_i = \frac{\partial h}{\partial y_i}(f_1, \dots, f_r)$. Osserviamo che gli h_i sono elementi omogenei di R di grado $d - d_i$, mentre gli $\partial f_i / \partial x_k$ sono elementi omogenei di S . A meno di rinominare gli indici, possiamo supporre che h_1, \dots, h_m sia un insieme minimale di generatori per l'ideale di R generato dagli h_i (dunque $1 \leq m \leq r$). Per ogni $i > m$ scriviamo

$$h_i = \sum_{j=1}^m g_{ij} h_j,$$

con $g_{ij} \in R$. Come polinomi in x_1, \dots, x_n gli h_i sono omogenei di grado $d - d_i$, dunque eliminando i termini ridondanti, possiamo assumere che ogni

g_{ij} sia omogeneo di grado $d_i - d_j$. Sostituendo questa espressione degli h_i si ottiene per ogni k fissato

$$\sum_{i=1}^m h_i \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{j=m+1}^r g_{ij} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right) = 0.$$

L'espressione in parentesi è omogenea di grado $d_i - 1$. Possiamo dunque applicare il lemma 5.4 e concludere che

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \sum_{j=m+1}^r g_{1j} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^r f_i q_i \in I,$$

con $q_i \in S$. Moltiplicando a destra e a sinistra per x_k e sommando su k possiamo applicare la formula di Eulero e ottenere

$$d_1 f_1 + \sum_{j=m+1}^r d_j g_{1j} f_j = \sum_{i=1}^r f_i r_i,$$

dove $\deg r_i > 0$. I termini sulla sinistra sono omogenei di grado d_1 , dunque il termine $f_1 r_1$ sulla destra (che ha grado maggiore di d_1) si deve cancellare con altri termini di grado differente da d_1 . Questo permette di esprimere f_1 come un elemento dell'ideale di S generato da f_2, \dots, f_r , contrariamente all'ipotesi di minimalità degli f_i come insieme di generatori di I . \square

5.2.5 (C) \Rightarrow (B)

Proposizione 5.6. *Se G è generato da riflessioni, allora S come R -modulo è libero di rango $|G|$.*

Dimostrazione. Consideriamo lo spazio vettoriale S/I su R/R_+ , dove I è sempre $R_+ S$. Siano $\{g_\alpha\} \subset S$ omogenei tali che $g_\alpha + I$ generino S/I . Vogliamo provare che i g_α generano S come R -modulo. Sia dunque $T = \langle g_\alpha \rangle_R$; chiaramente T risulta graduato. Proviamo per induzione su i che $T_i = S_i$. Il caso $i = 0$ è ovvio. Supponiamo che $T_i = S_i$ per $i < d$ e sia $f \in S_d$. Abbiamo che

$$f = \sum_{\alpha} c_{\alpha} g_{\alpha} + \sum_{\beta} f_{\beta} h_{\beta},$$

dove $c_{\alpha} \in K$, $h_{\beta} \in R$ ha grado positivo e f_{β} è omogeneo di grado minore di d . Per ipotesi induttiva ogni $f_{\beta} \in T$, che implica $f \in T$.

Supponiamo ora g_1, \dots, g_m elementi omogenei di S linearmente indipendenti modulo I . Dimostriamo per induzione su m che g_1, \dots, g_m sono indipendenti nell' R -modulo S .

Il caso $m = 1$ è ovvio. Sia ora $m > 1$ e supponiamo che

$$f_1 g_1 + \dots + f_m g_m = 0$$

con gli f_i omogenei in R . Poiché $g_1 \notin I$ per il lemma si può concludere che

$$f_1 = h_2 f_2 + \cdots + h_m f_m$$

per elementi omogenei $h_i \in R$. Sostituendo si ottiene

$$f_2(g_2 + h_2 g_1) + \cdots + f_m(g_m + h_m g_1) = 0.$$

Osserviamo che $g_i + h_i g_1$ sono omogenei e linearmente indipendenti modulo I . Per ipotesi induttiva $f_2 = \cdots = f_m = 0$ e dunque anche $f_1 = 0$.

Dunque abbiamo visto che una base dello spazio vettoriale S/I porta ad una base dell' R -modulo S che a sua volta porta a una base per l'estensione del campo delle frazioni su S sul campo delle frazioni di R , che come sappiamo ha dimensione $|G|$. \square

5.2.6 Unicità dei gradi

Proposizione 5.7. *Supponiamo che f_1, \dots, f_n e g_1, \dots, g_n siano due insiemi di generatori omogenei e algebricamente indipendenti dell'anello R dei polinomi G -invarianti. Denotiamo i rispettivi gradi con d_i e e_i . Allora a meno di rinumerare uno dei due insiemi, risulta $d_i = e_i$ per ogni i .*

Dimostrazione. Ogni f_i può essere scritto come un polinomio in g_1, \dots, g_n e ogni g_j come polinomio in f_1, \dots, f_n . Per ogni i, j abbiamo

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial g_k} \frac{\partial g_k}{\partial f_j} = \delta_{ij}.$$

Questo mostra che le matrici

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial g_j} \right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial g_i}{\partial f_j} \right)$$

sono una l'inversa dell'altra e dunque hanno determinante diverso da 0. Espandendo il primo determinante si deduce che per qualche permutazione π risulta

$$\prod_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial g_{\pi(i)}} \neq 0.$$

A meno di rinominare i g_i , possiamo assumere che $\pi = 1$. Dunque quando f_i è scritto come polinomio in g_1, \dots, g_n , ogni g_i occorre realmente. Dopo aver eliminato i termini ridondanti, possiamo assumere che ogni monomio

$$g_1^{k_1} \cdots g_n^{k_n}$$

che occorre in f_i soddisfi $d_i = \sum e_j k_j$. Dunque $d_i \geq e_i$ e quindi

$$\sum_{i=1}^n d_i \geq \sum_{i=1}^n e_i.$$

Scambiando il ruolo degli f_i e dei g_i si arriva alla disuguaglianza inversa e si conclude che per ogni i $d_i = e_i$. □

5.2.7 (B) \Rightarrow (A)

Teorema 5.8. *Se S è un R -modulo libero, allora R è polinomiale.*

Dimostrazione. Osserviamo che R come sottoanello di S è noetheriano e dunque R_+ è finitamente generato. Sia $\{f_1, \dots, f_m\}$ un insieme minimale di generatori omogenei di R_+ . Proviamo che f_1, \dots, f_m sono algebricamente indipendenti.

Supponiamo per assurdo che non sia vero. Allora esiste un polinomio non nullo $h(y_1, \dots, y_m)$ tale che $h(f_1, \dots, f_m) = 0$. Assumiamo che h abbia il minimo grado possibile. Poniamo $h_i = \frac{\partial h}{\partial y_i}(f_1, \dots, f_m)$, allora non tutti gli h_i sono 0. Possiamo assumere che gli h_i siano elementi omogenei di R . Sia J l'ideale in R generato da h_1, \dots, h_m e sia, a meno di rinumerare, $\{h_1, \dots, h_s\}$ un insieme minimale di generatori di J . Per ogni $s+1 \leq j \leq m$ e $1 \leq i \leq s$ esistono elementi omogenei $r_{ij} \in R$ tali che

$$h_j = \sum_{i=1}^s r_{ij} h_i.$$

Deriviamo $h(f_1, \dots, f_m)$ rispetto a x_k e otteniamo

$$0 = \frac{\partial h}{\partial x_k}(f_1, \dots, f_m) = \sum_{i=1}^m h_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^s h_i \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{j=s+1}^m r_{ij} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right)$$

Poniamo u_{ik} l'espressione fra parentesi nell'equazione sopra. Sia $(e_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq t}$ una base omogenea di S su R e scriviamo

$$u_{ik} = \sum_{\alpha} r_{ik\alpha} e_\alpha.$$

Allora

$$\sum_{i=1}^s h_i r_{ik\alpha} = 0,$$

e per la scelta di h_1, \dots, h_s si ha che gli elementi $r_{ik\alpha}$ non nulli devono avere termine costante zero. Dunque possiamo scrivere

$$u_{ik} = \sum_{h=1}^m u_{ikh} f_h.$$

Sia d_i il grado di f_i .

Poiché f_i è omogeneo abbiamo

$$d_i f_i = \sum_{l=1}^n x_l \frac{\partial f_i}{\partial x_l}.$$

Ne segue che

$$\sum_k x_k \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_{j=s+1}^m r_{ij} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right) = d_i f_i + \sum_{j=s+1}^m r_{ij} d_j f_j.$$

Considerando le componenti omogenee di grado d_i si vede che f_i è una combinazione lineare a coefficienti in S degli f_j con $j \neq i$

$$f_i = \sum_{j \neq i} \varphi_j f_j, \quad \varphi_j \in S;$$

applicando l'operatore media si arriva all'assurdo

$$f_i = f_i^\# = \sum_{j \neq i} \varphi_j^\# f_j, \quad \varphi_j^\# \in R.$$

□

5.2.8 Autovalori

Sia $w \in G$ che agisce su V con autovalori c_1, \dots, c_n . Allora ha senso scrivere

$$\det(1 - tw) = (1 - c_1 t) \cdots (1 - c_n t).$$

Se consideriamo t come una indeterminata, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \frac{1}{\det(1 - tw)} &= (1 + c_1 t + c_1^2 t^2 + \dots) \cdots (1 + c_n t + c_n^2 t^2 + \dots) = \\ &= \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{\sum k_i = k} c_1^{k_1} \cdots c_n^{k_n} \right) t^k = \sum_{k \geq 0} h_k(c_1, \dots, c_n) t^k. \end{aligned}$$

Proposizione 5.9. *Supponiamo che R sia polinomiale e che sia generato da f_1, \dots, f_n con $\deg f_i = d_i$. Allora vale*

$$\frac{1}{|G|} \sum_{w \in G} \frac{1}{\det(1 - tw)} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{(1 - t^{d_i})}.$$

Dimostrazione. Fissiamo $w \in G$ con autovalori c_1, \dots, c_n . Per determinare gli autovalori di w sulla componente omogenea S_k di S , possiamo usare la base costituita dai monomi

$$z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}, \quad \text{dove } k_1 + \cdots + k_n = k.$$

Questi sono autovettori di w corrispondenti agli autovalori $c_1^{k_1} \cdots c_n^{k_n}$. La somma di questi autovalori è la traccia di w su S_k ed è in accordo con il coefficiente di t^k nell'espansione in serie di $\frac{1}{\det(1-tw)}$.

Dunque il coefficiente di t^k nella sinistra dell'equazione nell'enunciato è la traccia dell'operatore lineare

$$\frac{1}{|G|} \sum_{w \in G} w$$

su S_k ; dunque è precisamente la dimensione dello spazio R_k dei polinomi omogenei invarianti di grado k .

D'altra parte i monomi

$$f_1^{e_1} \cdots f_n^{e_n} \quad \text{con} \quad \sum d_i e_i = k$$

formano una base di R_k . Il numero di tali n -uple (e_1, \dots, e_n) è evidentemente il coefficiente di t^k nella serie formale di potenze

$$(1 + t^{d_1} + t^{2d_1} + \dots) \cdots (1 + t^{d_n} + t^{2d_n} + \dots),$$

che è lo stesso del prodotto sulla destra. □

5.2.9 Somma e prodotto dei gradi

Teorema 5.10. *Se indichiamo con N il numero di riflessioni in G , si ha che*

1. $d_1 d_2 \cdots d_n = |G|$;
2. $d_1 + d_2 + \cdots + d_n = N + n$.

Dimostrazione. Osserviamo che se $w = id$, $\det(1 - tw) = (1 - t)^n$, se w è una riflessione del tipo

$$w = \begin{pmatrix} \zeta_w & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

allora $\det(1 - tw) = (1 - t)^{n-1} (1 - \zeta_w t)$. Per ogni w non riflessione l'esponente con cui $(1 - t)$ divide $\det(1 - tw)$ non può superare $n - 2$. Moltiplichiamo entrambi i lati dell'equazione nella proposizione precedente per $(1 - t)^n$ e otteniamo

$$\frac{1}{|G|} \left(1 + \sum_{\text{rif}} \frac{1-t}{1-\zeta_w t} + (1-t)^2 g(t) \right) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1+t+\dots+t^{d_i-1}}.$$

Valutando in $t = 1$ si ottiene il punto 1. Se differenziamo entrambi i lati e poi valutando in $t = 1$, si ottiene

$$-\frac{N}{2|G|} = - \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{1+t+\dots+t^{d_i-1}} \right) \Big|_{t=1} \cdot \left(\prod_{i=1}^n \frac{1+2t+\dots+(d_i-1)t^{d_i-2}}{1+t+\dots+t^{d_i-1}} \right) \Big|_{t=1} = -\frac{1}{2} \frac{1}{d_1 \dots d_n} \sum_{i=1}^n (d_i - 1).$$

da cui segue la tesi. \square

5.2.10 Criterio di indipendenza algebrica

C'è un semplice criterio per l'indipendenza algebrica (su un arbitrario campo di caratteristica 0) di n polinomi f_1, \dots, f_n in n indeterminate x_1, \dots, x_n . Scriviamo $J(f_1, \dots, f_n)$ per il determinante della matrice $n \times n$ il cui elemento i, j è $\partial f_i / \partial x_j$.

Proposizione 5.11. *I polinomi f_1, \dots, f_n nelle indeterminate x_1, \dots, x_n sono algebricamente indipendenti sul campo K (con caratteristica 0) se e solo se $J(f_1, \dots, f_n) \neq 0$.*

Dimostrazione. Suponiamo che i polinomi siano algebricamente dipendenti, ovvero che $h(f_1, \dots, f_n) = 0$ per qualche polinomio non nullo $h(y_1, \dots, y_n)$. Possiamo assumere che il grado di h sia il più piccolo possibile. Per ogni fissato j , differenziamo questa relazione rispetto a x_j e otteniamo

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial y_i}(f_1, \dots, f_n) \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0.$$

Per $j = 1, \dots, n$ queste equazioni formano un sistema di equazioni lineari su $K(x_1, \dots, x_n)$ la cui matrice dei coefficienti ha determinante $J(f_1, \dots, f_n)$. Poiché h è non costante, non tutti i $\partial h / \partial y_i$ possono essere nulli. Dunque il sistema lineare ha una soluzione non banale e dunque $J = 0$.

Supponiamo ora che f_1, \dots, f_n siano algebricamente indipendenti. Poiché $K(x_1, \dots, x_n)$ ha grado di trascendenza n su K , i polinomi x_i, f_1, \dots, f_n sono algebricamente dipendenti per ogni i . Sia $h_i(y_0, \dots, y_n)$ il polinomio di grado minimo positivo per cui

$$h_i(x_i, f_1, \dots, f_n) = 0.$$

Differenziamo rispetto a x_k e otteniamo

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial y_j}(x_i, f_1, \dots, f_n) \frac{\partial f_j}{\partial x_k} + \frac{\partial h_i}{\partial y_0}(x_i, f_1, \dots, f_n) \delta_{ik} = 0.$$

Poiché gli f_j sono algebricamente indipendenti, h_i deve avere grado positivo in y_0 . Dunque $\partial h_i / \partial x_i$ è non nullo e di grado minore del grado di h_i , forzando il valore di tale polinomio in x_i, f_1, \dots, f_n a essere non nullo.

Riscrevendo l'equazione in forma matriciale si ha

$$\begin{pmatrix} \partial h_i \\ \partial y_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial f_i \\ \partial x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta_{ij} \partial h_i \\ \partial x_j \end{pmatrix}$$

Da cui si deduce che $J \neq 0$.

□

Osserviamo che se f_1, \dots, f_n sono algebricamente indipendenti e di gradi rispettivamente d_1, \dots, d_n , allora $J(f_1, \dots, f_n)$ è un polinomio omogeneo di grado $\sum (d_i - 1) = N$.

5.2.11 (A) \Rightarrow (C)

Teorema 5.12. *Supponiamo che R sia generato da n polinomi omogenei algebricamente indipendenti g_1, \dots, g_n . Allora G è generato da riflessioni.*

Dimostrazione. Denotiamo con H il (possibilmente banale) sottogruppo di G generato dalle riflessioni di G . Allora sappiamo che S^H è generato da n polinomi f_1, \dots, f_n omogenei e algebricamente indipendenti. Siano d_i e e_i i gradi rispettivamente di f_i e g_i .

Ovviamente $S^G \subset S^H$, dunque i g_i possono essere scritti come polinomi negli f_i . Dopo aver eliminato i termini ridondanti, possiamo assumere che ogni monomio

$$f_1^{k_1} \dots f_n^{k_n}$$

che occorre in g_i soddisfi $e_i = \sum d_j k_j$.

Differenziamo rispetto a x_k e otteniamo

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_k} = \sum_j \frac{\partial g_i}{\partial f_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_k}$$

che in forma matriciale diventa

$$\begin{pmatrix} \partial g_i \\ \partial x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial g_i \\ \partial f_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial f_j \\ \partial x_k \end{pmatrix}$$

Poiché i g_i sono algebricamente indipendenti, segue che il determinante della matrice a sinistra è non nullo e dunque anche il determinante della matrice a destra che coinvolge i $\partial g_i / \partial f_j$.

A meno di rinumerare possiamo assumere che

$$\frac{\partial g_1}{\partial f_1} \dots \frac{\partial g_n}{\partial f_n} \neq 0.$$

Questo forza $e_i \geq d_i$ per ogni i . D'altra parte vale

$$\sum e_i = N + n = \sum d_i$$

e dunque $e_i = d_i$ per ogni i . Allora per il teorema

$$|G| = \prod e_i = \prod d_i = |H|$$

da cui $G = H$.

□

Capitolo 6

Rappresentazioni di $GL(V)$

6.1 Funtori di Schur e loro caratteri

Per ogni spazio vettoriale V di dimensione finita su \mathbb{C} , si ha la decomposizione

$$V \otimes V = \text{Sym}^2 V \oplus \wedge^2 V.$$

Il gruppo $GL(V)$ agisce su $V \otimes V$ e quella sopra è, come vedremo, la decomposizione di $V \otimes V$ in somma diretta di $GL(V)$ -rappresentazioni irriducibili. Per la successiva potenza del tensore si ha

$$V \otimes V \otimes V = \text{Sym}^3 V \oplus \wedge^3 V \oplus \text{altro spazio}.$$

Per esempio, se $\dim V = k = 3$ si ha che $\text{Sym}^3 V$ ha dimensione 10 e $\wedge^3 V$ ha dimensione 1. Si conclude che l'altro spazio che compare nella decomposizione di $V^{\otimes 3}$ ha dimensione 16.

Il gruppo simmetrico S_d agisce su $V^{\otimes d}$ da destra permutando i fattori

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) \cdot \sigma = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(d)}.$$

questa azione commuta con l'azione a sinistra di $GL(V)$. Per ogni partizione λ di d denotiamo con $S_\lambda V$ l'immagine di c_λ su $V^{\otimes d}$ che è ancora una $GL(V)$ -rappresentazione. Chiamiamo il funtore $V \rightarrow S_\lambda V$ *funtore di Schur* corrispondente a λ . Dunque ad ogni mappa lineare $\varphi : V \rightarrow W$ corrisponde una mappa lineare $S_\lambda(\varphi) : S_\lambda V \rightarrow S_\lambda W$ in modo tale che

$$S_\lambda(\varphi \circ \phi) = S_\lambda(\varphi) \circ S_\lambda(\phi), \quad S_\lambda(\text{Id}_V) = \text{Id}_{S_\lambda V}.$$

Per esempio la partizione (d) corrisponde al funtore $V \rightarrow \text{Sym}^d V$ e la partizione (1^d) corrisponde al funtore $V \rightarrow \wedge^d V$. Consideriamo la partizione $(2, 1)$ di 3 e ricordiamo che

$$c_{(2,1)} = 1 + e_{(12)} - e_{(13)} - e_{(132)};$$

dunque l'immagine di c_λ è il sottospazio di $V^{\otimes 3}$ generato da tutti i vettori

$$v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 + v_2 \otimes v_1 \otimes v_3 - v_3 \otimes v_2 \otimes v_1 - v_3 \otimes v_1 \otimes v_2.$$

Se immergiamo $\bigwedge^2 V \otimes V$ in $V^{\otimes 3}$ attraverso la mappa

$$(v_1 \wedge v_3) \otimes v_2 \mapsto v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 - v_3 \otimes v_2 \otimes v_1,$$

allora l'immagine di c_λ è il sottospazio di $\bigwedge^2 V \otimes V$ generato da tutti i vettori

$$(v_1 \wedge v_3) \otimes v_2 + (v_2 \wedge v_3) \otimes v_1.$$

Non è difficile verificare che questi vettori generano il nucleo della mappa canonica da $\bigwedge^2 V \otimes V$ a $\bigwedge^3 V$, dunque si ha

$$S_{(2,1)}V = \ker(\bigwedge^2 V \otimes V \rightarrow \bigwedge^3 V).$$

(Questo costituisce il fattore mancante nella decomposizione di $V^{\otimes 3}$.)

Ogni endomorfismo g di V da origine a un endomorfismo di $S_\lambda V$. Per capire quali rappresentazioni si hanno, bisogna calcolare la traccia di questi endomorfismi su $S_\lambda V$. Siano dunque x_1, \dots, x_k gli autovalori di g su V , con $k = \dim V$. Due casi sono abbastanza semplici. Per $\lambda = (d)$

$$S_{(d)}V = \text{Sym}^d V, \quad \chi_{S_{(d)}V}(g) = h_d(x_1, \dots, x_k),$$

dove h_d è la funzione simmetrica completa di grado d . La formula sopra è evidente nel caso in cui g sia una matrice diagonale e dunque è vera per l'insieme denso degli endomorfismi diagonalizzabili e dunque per tutti gli endomorfismi. Per $\lambda = (1^d)$ si ha

$$S_{(1^d)}V = \bigwedge^d V, \quad \chi_{S_{(1^d)}V}(g) = e_d(x_1, \dots, x_k),$$

dove e_d è il polinomio simmetrico elementare. Come abbiamo già visto, i polinomi h_d e e_d sono casi particolari dei polinomi di Schur s_λ e dimostreremo in generale che

$$\chi_{S_\lambda V}(g) = s_\lambda(x_1, \dots, x_k),$$

per ogni partizione λ di d . In particolare dimostreremo il seguente

Teorema 6.1. 1. Sia $k = \dim V$. Allora $S_\lambda V$ è zero se $\lambda_{k+1} \neq 0$. Se $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 0)$, allora

$$\dim S_\lambda V = \prod_{1 \leq i \leq j \leq k} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i}.$$

2. Sia m_λ la dimensione della rappresentazione irriducibile V_λ di S_d , corrispondente a λ . Allora

$$V^{\otimes d} \cong \bigoplus_\lambda S_\lambda V^{\otimes m_\lambda}.$$

3. Per ogni $g \in GL(V)$, la traccia di g su $S_\lambda V$ è il valore della funzione di Schur calcolata negli autovalori x_1, \dots, x_k di g su V :

$$\chi_{S_\lambda V}(g) = s_\lambda(x_1, \dots, x_k).$$

4. Ogni $S_\lambda V$ è una rappresentazione irriducibile di $GL(V)$.

6.2 Dimostrazioni

L'obiettivo di questa sezione è di dimostrare il teorema 6.1

Proposizione 6.2. *Sia G un gruppo finito. Allora*

$$\mathbb{C}G \cong \bigoplus_i \text{End } W_i,$$

dove W_i sono le rappresentazioni irriducibili di G .

Dimostrazione. Consideriamo

$$\varphi : \mathbb{C}G \rightarrow \bigoplus_i \text{End } W_i$$

le cui componenti coincidono con l'azione di $\mathbb{C}G$ su W_i . Ogni componente è un omomorfismo di algebre, quindi anche φ lo è. φ è iniettiva, infatti se un elemento $a \in \mathbb{C}G$ agisce come la mappa nulla su ogni rappresentazione irriducibile W_i , allora a agisce banalmente su $\mathbb{C}G$. In più è surgettiva per motivi dimensionali. \square

Sia G un gruppo finito e U un $\mathbb{C}G$ -modulo destro; poniamo

$$B = \text{Hom}_G(U, U) = \{\varphi : U \rightarrow U : \varphi(vg) = \varphi(v)g, \forall v \in U, g \in G\}.$$

Osserviamo che B agisce su U da sinistra, e questa azione commuta con l'azione destra di $\mathbb{C}G$. Se $U = \bigoplus U_i^{\oplus n_i}$ è la decomposizione di U in irriducibili, allora per il lemma di Schur si ha

$$B = \bigoplus_i \text{Hom}_G(U_i^{\oplus n_i}, U_i^{\oplus n_i}) = \bigoplus_i M_{n_i \times n_i}(\mathbb{C}).$$

Se W è un $\mathbb{C}G$ -modulo sinistro, il prodotto tensore

$$U \otimes_{\mathbb{C}G} W = U \otimes_{\mathbb{C}} W / \langle va \otimes w - v \otimes aw \rangle_{a \in \mathbb{C}G}$$

è un B -modulo sinistro con l'azione $b(v \otimes w) = (bv) \otimes w$.

Proposizione 6.3. *Sia U un $\mathbb{C}G$ -modulo destro di dimensione finita.*

1. Per ogni $c \in \mathbb{C}G$, $U \otimes_{\mathbb{C}G} \mathbb{C}Gc \cong Uc$ come B -moduli.
2. Se $W = \mathbb{C}Gc$ è un $\mathbb{C}G$ -modulo sinistro irriducibile, allora $U \otimes_{\mathbb{C}G} W = Uc$ è un B -modulo irriducibile oppure è 0.

3. Se $W_i = \mathbb{C}Gc_i$ sono al variare del parametro i tutti i $\mathbb{C}G$ -moduli sinistri irriducibili, allora

$$U \cong \bigoplus_i (Uc_i)^{\oplus \dim W_i}.$$

Dimostrazione. Per provare la 1, consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccc} U \otimes_{\mathbb{C}G} \mathbb{C}G & \xrightarrow{\cdot c} & U \otimes_{\mathbb{C}G} \mathbb{C}Gc & \longrightarrow & U \otimes_{\mathbb{C}G} \mathbb{C}G \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{\cdot c} & Uc & \longrightarrow & U \end{array}$$

dove le mappe verticali sono le mappe $v \otimes a \mapsto va$; poiché le mappe orizzontali sulla sinistra sono surgettive, quelle sulla destra iniettive e le mappe verticali destra e sinistra sono isomorfismi, si conclude che anche la mappa verticale in mezzo deve essere un isomorfismo.

Per la 2 consideriamo prima il caso in cui U sia irriducibile e dunque $B = \mathbb{C}$. È sufficiente provare che $\dim U \otimes_{\mathbb{C}G} W \leq 1$.

Identifichiamo $\mathbb{C}G$ con la somma diretta $\bigoplus_{i=1}^r M_{m_i \times m_i}(\mathbb{C})$ di r algebre di matrici. Possiamo dunque identificare W con un ideale sinistro minimale di $\mathbb{C}G$. Ogni ideale minimale nella somma di algebre di matrici è isomorfo a uno che consiste di r -uple di matrici che sono 0 eccetto in unico fattore e in questo fattore sono tutte nulle eccetto che per una colonna. Nello stesso modo U si può identificare con l'ideale destro delle r -uple di matrici che sono zero eccetto in un fattore e in quel fattore sono 0 eccetto che per una riga. Dunque $U \otimes_{\mathbb{C}G} W$ sarà zero a meno che il fattore sia lo stesso in U e W , nel qual caso $U \otimes_{\mathbb{C}G} W \cong \mathbb{C}$.

Se $U = \bigoplus_i U_i^{\oplus n_i}$ è la decomposizione di U in irriducibili, allora

$$U \otimes_{\mathbb{C}G} W = \bigoplus_i (U_i \otimes_{\mathbb{C}G} W)^{\oplus n_i} = \mathbb{C}^{\oplus n_k}$$

per qualche k che è ovviamente irriducibile su $B = \bigoplus_i M_{n_i \times n_i}(\mathbb{C})$.

Il punto 3 segue visto che l'isomorfismo $\mathbb{C}G \cong \bigoplus W_i^{\oplus \dim W_i}$ determina un isomorfismo

$$U \cong U \otimes_{\mathbb{C}G} \mathbb{C}G \cong U \otimes_{\mathbb{C}G} \left(\bigoplus W_i^{\oplus \dim W_i} \right) \cong \bigoplus (U \otimes_{\mathbb{C}G} W_i)^{\oplus \dim W_i}.$$

□

Per dimostrare il teorema 6.1, applicheremo la proposizione 6.3 al $\mathbb{C}S_d$ -modulo destro $U = V^{\otimes d}$. Questa proposizione mostra come decomporre U come B -modulo.

Lemma 6.4. *L'algebra B è generata come sottospazio lineare di $\text{End}(V^{\otimes d})$ da $\text{End}(V)$. Un sottospazio di $V^{\otimes d}$ è un sotto- B -modulo se e solo se è $GL(V)$ -invariante.*

Dimostrazione. Notiamo che se W è un qualunque spazio vettoriale di dimensione finita, allora $\text{Sym}^d W$ è il sottospazio di $W^{\otimes d}$ generato da tutti i $w \otimes \cdots \otimes w$ al variare di $w \in W$. Infatti se $\varphi \in (\text{Sym}^d W)^*$ si annulla su $\langle w \otimes \cdots \otimes w \rangle_{w \in W}$, allora $\varphi = 0$. Sia $v \in \text{Sym}^d W$, allora

$$v = \sum_{\lambda} \gamma_{\lambda} m_{\lambda}(w_1, \dots, w_k),$$

con w_1, \dots, w_k base di W . Allora

$$0 = \varphi((x_1 w_1 + \cdots + x_k w_k)^{\otimes d}) = \sum \varphi(m_{\lambda}) m_{\lambda}(x_1, \dots, x_k)$$

e dunque $\varphi(m_{\lambda}) = 0$ per ogni λ .

Applicando questo a $W = \text{End}(V) = V^* \otimes V$ la prima parte del lemma è dimostrata, poiché $\text{End}(V^{\otimes d}) = (V^*)^{\otimes d} \otimes V^{\otimes d} = W^{\otimes d}$ e dunque

$$B \cong \text{Sym}^d(\text{End}(V)).$$

La seconda affermazione del lemma segue invece dal fatto che $GL(V)$ è denso in $\text{End}(V)$. \square

Torniamo alla dimostrazione del teorema 6.1. Notiamo che $S_{\lambda}V = U c_{\lambda}$, dunque i punti 2 e 4 seguono immediatamente dalla proposizione 6.3 e dal lemma 6.4.

Dalla proposizione 6.3 abbiamo un isomorfismo di $GL(V)$ -moduli

$$S_{\lambda}V \cong V^{\otimes d} \otimes_{\mathbb{C}S_d} V_{\lambda}.$$

Analogamente per $U_{\lambda} = \mathbb{C}S_d a_{\lambda}$, dal momento che l'immagine della moltiplicazione a destra per a_{λ} su $V^{\otimes d}$ è il prodotto tensore di potenze simmetriche, si ha

$$\text{Sym}^{\lambda_1} V \otimes \text{Sym}^{\lambda_2} V \otimes \cdots \otimes \text{Sym}^{\lambda_k} V \cong V^{\otimes d} \otimes_{\mathbb{C}S_d} U_{\lambda}.$$

D'altra parte abbiamo un isomorfismo $U_{\lambda} \cong \bigoplus_{\mu} K_{\mu\lambda} V_{\mu}$ di $\mathbb{C}S_d$ -moduli, dunque possiamo dedurre un isomorfismo di $GL(V)$ -moduli

$$\text{Sym}^{\lambda_1} V \otimes \text{Sym}^{\lambda_2} V \otimes \cdots \otimes \text{Sym}^{\lambda_k} V \cong \bigoplus_{\mu} K_{\mu\lambda} S_{\mu}V.$$

Per quanto osservata, la traccia di un elemento g sulla parte sinistra dell'equazione sopra, è esattamente la funzione $h_{\lambda}(x_1, \dots, x_k)$. Se $S_{\lambda}(g)$ denota l'endomorfismo di $S_{\lambda}V$ determinato dall'endomorfismo g , si ha

$$h_{\lambda}(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\mu} K_{\mu\lambda} \text{Tr}(S_{\mu}(g)).$$

Sappiamo però che vale anche

$$h_{\lambda}(x_1, \dots) = \sum_{\mu} K_{\mu\lambda} s_{\mu}(x_1, \dots).$$

Per la triangolarità della matrice $(K_{\mu\lambda})$, si deduce che

$$\mathrm{Tr}(S_{\mu}(g)) = s_{\mu}(x_1, \dots, x_k, 0, \dots),$$

che prova il punto 3. In più per le formule determinantalì, se $\ell(\lambda) > k$, allora segue che $s_{\lambda}(x_1, \dots, x_k, 0, \dots) = 0$ il che implica che $\dim S_{\lambda}V = 0$.

Rimane da provare solo il punto 1. Dal punto 3 abbiamo che

$$\dim S_{\lambda}V = s_{\lambda}(1, \dots, 1).$$

Calcoliamo $s_{\lambda}(1, x, x^2, \dots, x^{k-1})$ e poi facciamo tendere x a 1 per ottenere la tesi. Si ha

$$\begin{aligned} s_{\lambda}(1, x, x^2, \dots, x^{k-1}) &= \frac{\det(x^{(i-1)(\lambda_j+n-j)})}{\prod_{j<r} x^{n-j} - x^{n-r}} = \frac{\det((x^{\lambda_j+n-j})^{i-1})}{\prod_{j<r} x^{n-j} - x^{n-r}} = \\ &= \frac{\prod_{j<r} x^{\lambda_j+n-j} - x^{\lambda_r+n-r}}{\prod_{j<r} x^{n-j} - x^{n-r}} = \frac{\prod_{j<r} x^{\lambda_r+n-r} (x^{\lambda_j-\lambda_r+r-j} - 1)}{\prod_{j<r} x^{n-r} (x^{r-j} - 1)}. \end{aligned}$$

Semplificando e facendo il limite con la regola di de l'Hôpital si ha la tesi. \square

Esempio 9. Vediamo come si decompone la rappresentazione $S_{\lambda}V \otimes S_{\mu}V$. Abbiamo che

$$S_{\lambda}V \otimes S_{\mu}V = V^{\otimes n} c_{\lambda} \otimes V^{\otimes m} c_{\mu} = V^{\otimes n+m} (c_{\lambda} \otimes c_{\mu}) = \bigoplus_{\gamma} \theta_{\gamma} S_{\gamma}V.$$

Passando ai caratteri e usando la regola di Littlewood-Richardson, si trova che $\theta_{\gamma} = c_{\mu\gamma}^{\lambda}$ (vedi sezione 4.8).

Bibliografia

- [1] W. Fulton, J. Harris, *Representation Theory: a first course*, (Springer)
- [2] I.G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, (Oxford Science Publications)
- [3] T.A. Springer, *Invariant Theory*, (Lecture Notes in Mathematics 585)
- [4] J.E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, (Cambridge University Press)
- [5] M. Monge, *Funzioni simmetriche e polinomi di Newton*, (Tesi di laurea 2008)
- [6] C. Procesi, *Lie Groups. An Approach through Invariants and Representations*, (Springer, 2006)